求解相容的矩阵方程组 $A_1XB_1=D_1$，$A_2XB_2=D_2$ 的一种迭代法

姚健康

(南京师范大学数学与计算机科学学院，南京，210097)

[摘要] 给出了求解矩阵方程组 $A_1XB_1=D_1$，$A_2XB_2=D_2$ 的迭代法.

[关键词] 矩阵方程组 迭代法

[中图分类号]O151.21； [文献标识码]A； [文章编号]1001-4616(2001)01-0006-05

0 引言

文[1]给出了

$$A_1XB_1=D_1,A_2XB_2=D_2 \tag{1}$$

的相容的充分必要条件为：

$$A_1A_1^-D_1B_1^-B_1=D_1,A_2A_2^-D_2B_2^-B_2=D_2,$$
$$(I-HH^-)A_2A_1^-D_1B_1^-B_2(I-G^-G)=(I-HH^-)D_2(I-G^-G) \tag{2}$$

其中，$H=A_2(I-A_1^-A_1)$，$G=(I-B_1B_1^-)B_2$.

并给出了在相容条件下的矩阵方程组的通解：

$$X=A_1^-D_1B_1^-+F_{A_1}H^-D_2B_2^--F_{A_1}H^-A_2A_1^-D_1B_1^-B_2B_2^-$$
$$-F_{A_1}H^-A_2K^-(E_HD_2-KA_1^-D_1B_1^-B_2)B_2^--F_{A_1}H^-A_2F_KW_1GB_2^-$$
$$+F_{A_1}W-F_{A_1}H^-HWB_2B_2^-+K^-(E_HD_2-KA_1^-D_1B_1^-B_2)G^-E_{B_1}+F_KW_1E_{B_1}+W_2E_GE_{B_1},$$

其中，$E_T=I-TT^-$，$F_T=I-T^-T$，$H=A_2F_{A_1}$，$G=E_{B_1}B_2$，$K=E_HA_2$，W_1，W_2，W 为任意矩阵.

另外，文[2]给出了矩阵方程组(1)的相容性条件及通解表达式的另一形式.本文的目标是给出当矩阵方程组(1)相容时求其极小 F-范数解的有限步终止的迭代法.

1 主要结果

设 $A_1,A_2\in C^{m\times n}$，$B_1,B_2\in C^{p\times q}$，$D_1,D_2\in C^{m\times q}$，并设方程组

$$\begin{cases}A_1XB_1=D_1\\A_2XB_2=D_2\end{cases} \tag{3}$$

收稿日期：2000-06-21

作者简介 姚健康，1967—，南京师范大学数学与计算机科学学院硕士研究生，主要从事最优化理论及应用的学习与研究.

是相容的.

求解方程组(3)的迭代法为：

算法：

(1)给定 $X_1\in C^{n\times p}$，计算

$Z_1=P_1=A_1^H(D_1-A_1X_1B_1)B_1^H+A_2^H(D_2-A_2X_1B_2)B_2^H$，

$R_1=\begin{pmatrix}D_1-A_1X_1B_1\\D_2-A_2X_1B_2\end{pmatrix}$，

$k:=1$.

(2)计算

$$X_{k+1}=X_k+\frac{\|R_k\|_F^2}{\|P_k\|_F^2}P_k.$$

(3)计算

$Z_{k+1}=A_1^H(D_1-A_1X_{k+1}B_1)B_1^H+A_2^H(D_2-A_2X_{k+1}B_2)B_2^H$，

$$P_{k+1}=Z_{k+1}-\frac{\mathrm{tr}(Z_{k+1}^HP_k)}{\|P_k\|_F^2}P_k,$$

$$R_{k+1}=\begin{pmatrix}D_1-A_1X_{k+1}B_1\\D_2-A_2X_{k+1}B_2\end{pmatrix}.$$

如果 $R_{k+1}=0$，停止 否则置 $k=:k+1$，转(2).

下面我们来证明算法至多 $n\times p$ 步终止.

定义 矩阵 $P,Q\in C^{m\times n}$，若 $\mathrm{tr}(P^HQ)=0$. 称 P,Q 是互相正交的.

引理 1 对算法中的 R_i,P_i,Z_i，有

$$\mathrm{tr}(R_{i+1}^HR_j)=\mathrm{tr}(R_i^HR_j)-\frac{\|R_i\|_F^2}{\|P_i\|_F^2}\mathrm{tr}(P_i^HZ_j) \tag{4}$$

对 $\forall\, i,j$.

证明

$$\mathrm{tr}(R_{i+1}^HR_j)=\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix}D_1-A_1X_{i+1}B_1\\D_2-A_2X_{i+1}B_2\end{pmatrix}^HR_j\right]$$

$$=\mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix}D_1-A_1X_iB_1-\frac{\|R_i\|_F^2}{\|P_i\|_F^2}A_1P_iB_1\\D_2-A_2X_iB_2-\frac{\|R_i\|_F^2}{\|P_i\|_F^2}A_2P_iB_2\end{pmatrix}^HR_j\right]$$

$$=\mathrm{tr}(R_i^HR_j)-\frac{\|R_i\|_F^2}{\|P_i\|_F^2}\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix}A_1P_iB_1\\A_2P_iB_2\end{pmatrix}^H\begin{pmatrix}D_1-A_1X_jB_1\\D_2-A_2X_jB_2\end{pmatrix}\right)$$

$$=\mathrm{tr}(R_i^HR_j)-\frac{\|R_i\|_F^2}{\|P_i\|_F^2}\mathrm{tr}[B_1^HP_i^HA_1^H(D_1-A_1X_jB_1)+B_2^HP_i^HA_2^H(D_2-A_2X_jB_2)]$$

$$=\mathrm{tr}(R_i^HR_j)-\frac{\|R_i\|_F^2}{\|P_i\|_F^2}\mathrm{tr}[P_i^HA_1^H(D_1-A_1X_jB_1)B_1^H+P_i^HA_2^H(D_2-A_2X_jB_2)B_2^H]$$

$$=\mathrm{tr}(R_i^HR_j)-\frac{\|R_i\|_F^2}{\|P_i\|_F^2}\mathrm{tr}(P_i^HZ_j).$$

引理2　对算法中的 R_i, P_i, Z_i,及 $k \geqslant 2$,有

$$\mathrm{tr}(R_i^H R_j) = 0, \mathrm{tr}(P_i^H P_j) = 0, i, j = 1, 2, \cdots, k, i \neq j. \tag{5}$$

证明　用数学归纳法.

当 $k = 2$ 时,由引理 1,

$$\mathrm{tr}(R_2^H R_1) = \mathrm{tr}(R_1^H R_1) - \frac{\| R_1 \|_F^2}{\| P_1 \|_F^2}\mathrm{tr}(P_1^H Z_1) = \| R_1 \|_F^2 - \frac{\| R_1 \|_F^2}{\| P_1 \|_F^2}\mathrm{tr}(P_1^H P_1) = 0,$$

$$\mathrm{tr}(P_2^H P_1) = \mathrm{tr}\left(\left(Z_2 - \frac{\mathrm{tr}(Z_2^H P_1)}{\| P_1 \|_F^2}P_1\right)^H P_1\right) = \mathrm{tr}(Z_2^H P_1) - \frac{\mathrm{tr}(Z_2^H P_1)}{\| P_1 \|_F^2}\mathrm{tr}(P_1^H P_1) = 0.$$

假设 $k = i$ 时(4)成立,则由引理 1,

$$\mathrm{tr}(R_{i+1}^H R_i) = \mathrm{tr}(R_i^H R_i) - \frac{\| R_i \|_F^2}{\| P_i \|_F^2}\mathrm{tr}(P_i^H Z_i)$$

$$= \| R_i \|_F^2 - \frac{\| R_i \|_F^2}{\| P_i \|_F^2}\mathrm{tr}\left(P_i^H\left(P_i + \frac{\mathrm{tr}(Z_i^H P_{i-1})}{\| P_{i-1} \|_F^2}P_{i-1}\right)\right)$$

$$= \| R_i \|_F^2 - \frac{\| R_i \|_F^2}{\| P_i \|_F^2}\left(\mathrm{tr}(P_i^H P_i) + \mathrm{tr}(P_i^H P_{i-1})\frac{\mathrm{tr}(Z_i^H P_{i-1})}{\| P_{i-1} \|_F^2}\right) = 0.$$

$$\mathrm{tr}(P_{i+1}^H P_i) = \mathrm{tr}\left(\left(Z_{i+1} - \frac{\mathrm{tr}(Z_{i+1}^H P_i)}{\| P_i \|_F^2}P_i\right)^H P_i\right) = \mathrm{tr}(Z_{i+1}^H P_i) - \frac{\mathrm{tr}(Z_{i+1}^H P_i)}{\| P_i \|_F^2}\mathrm{tr}(P_i^H P_i) = 0.$$

对于 $j = 1, 2, \cdots, i-1$,

$$\mathrm{tr}(R_{i+1}^H R_j) = \mathrm{tr}(R_i^H R_j) - \frac{\| R_i \|_F^2}{\| P_i \|_F^2}\mathrm{tr}(P_i^H Z_j) = -\frac{\| R_i \|_F^2}{\| P_i \|_F^2}\mathrm{tr}\left(P_i^H\left(P_j + \frac{\mathrm{tr}(Z_i^H P_{j-1})}{\| P_{j-1} \|_F^2}P_{j-1}\right)\right)$$

$$= -\frac{\| R_i \|_F^2}{\| P_i \|_F^2}\left(\mathrm{tr}(P_i^H P_j) + \mathrm{tr}(P_i^H P_{j-1})\frac{\mathrm{tr}(Z_j^H P_{j-1})}{\| P_{j-1} \|_F^2}\right) = 0.$$

$$\mathrm{tr}(P_{i+1}^H P_j) = \mathrm{tr}\left(\left(Z_{i+1} - \frac{\mathrm{tr}(Z_{i+1}^H P_i)}{\| P_i \|_F^2}P_i\right)^H P_j\right) = \mathrm{tr}(Z_{i+1}^H P_j) - \frac{\mathrm{tr}(Z_{i+1}^H P_i)}{\| P_i \|_F^2}\mathrm{tr}(P_i^H P_j)$$

$$= \frac{\| P_j \|_F^2}{\| R_j \|_F^2}\mathrm{tr}(R_{i+1}^H(R_j - R_{j+1})) = 0.$$

由归纳原理知,引理 2 成立.

引理 3　设方程组(3)相容. 若 $R_k \neq 0$,则 $P_k \neq 0$.

证明　设 X^* 为方程组的一个解. 先证下式成立:

$$\mathrm{tr}[(X^* - X_k)^H P_k] = \| R_k \|_F^2 \tag{6}$$

对 $k \geqslant 1$ 运用数学归纳法.

当 $k = 1$ 时,$P_1 = Z_1$,所以

$$\mathrm{tr}[(X^* - X_1)^H P_1] = \mathrm{tr}[(X^* - X_1)^H Z_1] + A_2^H(D_2 - A_2 X_1 B_2) B_2^H)]$$

$$= \mathrm{tr}[(X^* - X_1)^H(A_1^H(D_1 - A_1 X_1 B_1) B_1^H] + \mathrm{tr}[(X^* - X_1)^H(A_2^H(D_2 - A_2 X_1 B_2) B_2^H]$$

$$= \mathrm{tr}[B_1^H(X^* - X_1)^H(A_1^H(D_1 - A_1 X_1 B_1)] + \mathrm{tr}[B_2^H(X^* - X_1)^H(A_2^H(D_2 - A_2 X_1 B_2)]$$

$$= \mathrm{tr}\left[\begin{pmatrix} A_1(X^* - X_1) B_1 \\ A_2(X^* - X_1) B_2 \end{pmatrix}^H \begin{pmatrix} D_1 - A_1 X_1 B_1 \\ D_2 - A_2 X_1 B_2 \end{pmatrix}\right] \tag{7}$$

$= \mathrm{tr}(R_1^H R_1)$　(用 $A_i X^* B_i = D_i, i = 1, 2$) $= \| R_1 \|_F^2$.

假设 $k = i$ 时(6)成立,则

$$\mathrm{tr}[(X^*-X_{i+1})^HP_i]=\mathrm{tr}[(X^*-X_i)^HP_i]-\frac{\|R_i\|_F^2}{\|P_i\|_F^2}\mathrm{tr}(P_i^HP_i)=\|R_i\|_F^2-\|R_i\|_F^2=0.$$

所以，

$$\mathrm{tr}[(X^*-X_{i+1})^HP_{i+1}]=\mathrm{tr}[(X^*-X_{i+1})^H(Z_{i+1}-\frac{\mathrm{tr}(Z_{i+1}^HP_i)}{\|P_i\|_F^2}P_i)]$$

$$=\mathrm{tr}[(X^*-X_{i+1})^HZ_{i+1}]-\mathrm{tr}[(X^*-X_{i+1})^HP_i]\frac{\mathrm{tr}(Z_{i+1}^HP_i)}{\|P_i\|_F^2}=\mathrm{tr}[(X^*-X_{i+1})^HZ_{i+1}].$$

类似于(7)的证法，有

$$\mathrm{tr}[(X^*-X_{i+1})^HP_{i+1}]=\mathrm{tr}[(X^*-X_{i+1})^HZ_{i+1}]=\|R_{i+1}\|_F^2,$$

由归纳原理知，(6)对所有的 k 成立.

因此，若 $R_k\neq 0$，则 $P_i\neq 0$.

定理 4 假设方程组(3)是相容的. 对任一初始值 X_1，算法至多 $n\times p$ 步终止于方程(3)的一个解.

证明 如果 $R_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n\times p$，由引理 3 知，$P_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n\times p$，那么由算法可计算得到 $X_{n\times p+1}$和 $R_{n\times p+1}$.

由引理 2 知，

$$\mathrm{tr}(R_{n\times p+1}^HR_i)=0, i=1,2,\cdots,n\times p.$$

而

$$\mathrm{tr}(R_i^HR_j)=0, i=1,2,\cdots,n\times p, i\neq j,$$

这表明，$\{R_i: i=1,\cdots,n\times p\}$是矩阵空间 $C^{n\times p}$的一组正交基. 所以，必有 $R_{n\times p+1}=0$

因此，$X_{n\times p+1}$为方程组(3)的解.

定理 5 设方程组(3)是相容的. 若 $X_1=0$，则算法至多 $n\times p$ 步终止于方程组(3)的一个极小 F-范数解.

证明 由算法与定理4知，至多 $n\times p$ 步可得一下列形式的解：

$$X^*=A_1^HY_1B_1^H+A_2^HY_2B_2^H. \tag{8}$$

可以证明，解(8)为方程组(3)的极小 F-范数解.

事实上，用矩阵的拉直运算 $vec(.)$及 Kronecker 积，并记 $x=vec(X)$，$x^*=vec(X^*)$，$y_1=vec(Y_1)$，$y_2=vec(Y_2)$，$d_1=vec(D_1)$，$d_2=vec(D_2)$，则(3)对应于线性方程组

$$\begin{bmatrix}A_1\otimes B_1^T\\A_2\otimes B_2^T\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}d_1\\d_2\end{bmatrix} \tag{9}$$

而

$$x^*=\begin{bmatrix}A_1\otimes B_1^T\\A_2\otimes B_2^T\end{bmatrix}^H\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\in R\left(\begin{bmatrix}A_1\otimes B_1^T\\A_2\otimes B_2^T\end{bmatrix}^H\right).$$

据文[4]，x^*是相容线性方程组的极小 2-范数解. 因此，x^*是(3)的极小 F-范数解.

2 举例

例 求解矩阵方程组(3)，其中

$$A_1=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\\0&0\end{pmatrix}, B_1=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}, D_1=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&0\\0&0\end{pmatrix},$$

$$A_2=\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\\0&1\end{pmatrix},B_2=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},D_2=\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

解　经验证,可知方程组是相容的.

(1)取 $X_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$,计算:$Z_1=P_1=\begin{pmatrix}0&1\\0&-3\end{pmatrix}$,$R_1=\begin{pmatrix}1&-1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&-1\end{pmatrix}^H$.

(2)计算:$X_2=\begin{pmatrix}1&\frac{3}{10}\\0&-\frac{9}{10}\end{pmatrix}$,$Z_2=\begin{pmatrix}0&-\frac{4}{5}\\0&0\end{pmatrix}$,

$$R_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}&-\frac{1}{10}&0&0&0&0\\0&0&0&-\frac{3}{10}&\frac{3}{10}&-\frac{1}{10}\end{pmatrix}^H,P_2=\begin{pmatrix}0&-\frac{18}{25}\\0&-\frac{6}{25}\end{pmatrix}.$$

(3)计算:$X_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$,$R_3=0$.

所以,方程组的解为:

$$X=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

[参考文献]

[1] 屠文伟,袁永新.线性矩阵方程组 $A_1XB_1=D_1$,$A_2XB_2=D_2$ 的相容性及应用[J].曲阜师大学报,1998,24(1):51—54.

[2] 陈永林,李志林.用Kronecker积与广义逆矩阵求解矩阵方程[J].南京师大学报(自然科学版),1991,14(1):9—15.

[3] 陈永林.求解矩阵方程组 $AX=C$,$XB=D$ 的迭代法[J].南京师大学报(自然科学版),1999,22(1):1—3.

[4] Ben-Israel A,Greville T N E.Generalized Inverses:Theory and Applications[M].New York:Wiley,1974.

An Iterative Method for Solving the Consistent Set of Matrix Equations $A_1XB_1=D_1$, $A_2XB_2=D_2$

Yao Jiankang

(College of Mathematics and Computer Science,Nanjing Normal University,Nanjing,210097,PRC)

Abstract:This paper establishes an iterative method for solving the consistent set of matrix equations $A_1XB_1=D_1$,$A_2XB_2=D_2$.

Key words:matrix equation;iterative method

[责任编辑:陆炳新]