# 柱坐标圆柱螺线的 NURBS 表示

孙越泓

(南京师范大学数学与计算机科学学院,南京,210097)

[摘要] 在柱坐标下给出空间圆柱螺线的 NURBS 逼近,用反求控制顶点法确定逼近螺线控制顶点的定位.

[关键词] 柱坐标;圆柱螺线;NURBS;控制顶点

[中图分类号]TP391.72 [文献标识码]A; [文章编号]1001-4616(2001)01-0033-04

## 0 引言

空间圆柱螺线是一类特殊曲线,它与直线之间有无数个交点,是非有理的,无法用 NURBS 方法精确表示.但圆柱螺线是唯一既保持曲率常量,又保持扭矢常量的空间曲线,这种特性决定圆柱螺线可看作是其中任一小段螺线的无限自我复制,因此只要用 NURBS 曲线逼近描述其中任一小段螺线即可.

## 1 极坐标有理 Bézier 曲线

平面有理 Bézier 曲线可以参数化为极坐标$(r,\theta)$下的 $n$ 次有理 Bézier 曲线 $r(\theta)$[1].有以下约定:

(1)控制顶点 $\bar{b}_i=(r_i,\theta_i)$规则排列在角 $2\Delta<\pi$ 的径向上,即:

$$\theta_{i+1}-\theta_i=2\Delta;0\leqslant i\leqslant n-1 \tag{1}$$

不失一般性,假设径向 $\theta=0$ 使得 $0=(\theta_0+\theta_n)$成立.

(2)控制顶点 $\bar{b}_i=(r_i,\theta_i)$的权因子 $\rho_i$ 为 $\bar{b}_i$ 到坐标原点距离 $r_i$ 的倒数:

$$w_i=\rho_i=(r_i)^{-1};0\leqslant i\leqslant n \tag{2}$$

满足以上约定的曲线可看作是 $R^3$ 空间中带控制顶点 $\bar{b}_i^w$ 的一条非有理曲线在平面 $Z=1$ 上的透视投影.控制顶点 $\bar{b}_i^w$ 有柱坐标$(r,\theta,z)$:

$$\bar{b}_i^w=(r_iw_i,\theta_i,w_i)=(1,\theta_i,\rho_i).$$

用角参数 $t\in[-\Delta,\Delta]$替换平面有理 Bézier 曲线中的标准单位参数 $u\in[0,1]$,将曲线参数化为极坐标有理 Bézier 曲线 $\rho(\theta)$(即曲线到原点距离的倒数):

$$u=\frac{\tan t+T}{2T},T=\tan\Delta;t\in[-\Delta,\Delta],u\in[0,1]$$

$$\rho(\theta)=r^{-1}(\theta)=\sum_{i=0}^{n}\rho_iA_i^n(t),\theta=nt \tag{3}$$

收稿日期:2000-12-18

作者简介:孙越泓,1972—,女,南京师范大学数学与计算机科学学院讲师,主要从事计算几何、计算机辅助几何设计的教学与研究.

其中 $A_i^n(t)$ 是拟 Bernstein 三角基函数，由下列递推公式定义：

$$A_i^n(t)=\frac{C_n^i}{S^n}\sin^{n-i}(\Delta-t)\sin^i(\Delta+t),s=\sin(2\Delta) \tag{4}$$

## 2　任意偶次 Bézier 圆弧

Sanchez-Reyes 在文[2]中指出，极坐标下一整圆只能用一偶次 Bézier 曲线描述，而不能用一奇次的 Bézier 曲线表示. 将一张开给定 $2n\Delta$ 角的单位圆弧表示为任意偶次($n=2k$)的 Bézier 曲线[3]：

$$1=\sum_{i=0}^{n}w_iA_i^n(t) \tag{5}$$

其中系数 $w_i$ 是 $2k$ 次圆控制顶点的权函数，表达式为：

$$w_i=w_{n-i}=(C_n^i)^{-1}\sum_{r=0}^{i/2}C_k^{i-r}C_{i-r}^r(2C)^{i-2r},i\leqslant k \tag{6}$$

其中 $C=\cos(2\Delta)$，当 $i$ 是奇数时，商 $i/2$ 定义为小于 $i/2$ 的最大整数.

## 3　柱坐标空间有理 Bézier 曲线

由极坐标平面有理 Bézier 曲线 $\rho(\theta)$ 的控制顶点定义(1)，添加一垂直分量 $z_i$ 到控制顶点中，就得到一条 $R^3$ 空间的 $n$ 次 Bézier 曲线，其控制顶点的柱坐标为 $[r_i,\theta_i,z_i]$，权因子为 $w_i=\rho_i=(r_i)^{-1}$. 以坐标原点为中心，将这条有理曲线透视投影到平面 $z=1$ 上，得到另一条有理曲线 $\bar{\rho}(\theta)$[4]，其控制顶点可由 $R^3$ 空间曲线的控制多边形投影得到，柱坐标为 $[r_i/z_i,\theta_i,1]$，权因子为 $\bar{\rho}_i=\rho_iz_i$ 具有下列形式：

$$\bar{\rho}(\theta)=\sum_{i=0}^{n}(\rho_iz_i)A_i^n(\theta) \tag{7}$$

因此，这条 $R^3$ 空间曲线的 $z$ 分量按照 $\bar{\rho}(\theta)$ 可写为：

$$z(\theta)=\bar{\rho}(\theta)/\rho(\theta) \tag{8}$$

## 4　圆柱螺线 NURBS 表示

设直角坐标下理论圆柱螺线参数式方程为：

$$\bar{h}(\theta)=\{a\cos\theta,a\sin\theta,b\theta\} \tag{9}$$

其中 $a$ 为圆柱底圆半径，$a>0$，$b>0$，$\theta\in R$. 将单位圆弧极坐标有理 Bézier 表示(5)，推广到半径为 $a$ 的圆，控制顶点为 $\bar{b}_i=(r_i,\theta_i)$，其中 $i=0,1,\cdots,n$ 且 $n=2k$，$k\in N$. 则半径为 $a$ 的圆弧表示为：

$$\frac{1}{a}=\rho(\theta)=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{1}{a}w_i\right)A_i^n(t),$$

记 $r_i^{-1}=\dfrac{W_i}{a}=\dfrac{\rho_i}{a}$，则 $\rho_i=ar_i^{-1}$，当 $a=1$ 时，得单位圆弧(5).

设柱坐标下有理 Bézier 曲线 $\Gamma$ 的控制顶点为 $\bar{\rho}_i(r_i,\theta_i,z_i)$，权因子 $w_i=\rho_i=r_i^{-1}$，曲线 $\Gamma$ 的参数式方程可记为

$$\Gamma:\ \{x,y,z\}=\{\rho^{-1}(\theta)\cos(\theta),\rho^{-1}(\theta)\sin(\theta),z(\theta)\},$$

其中：

$$\theta = nt, t \in [-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}], \rho(\theta) = \sum_{i=0}^{n} \rho_i A_i^n(t), \bar{\rho}(\theta) = \sum_{i=0}^{n} \rho_i z_i A_i^n(t), z(\theta) = \frac{\bar{\rho}(\theta)}{\rho(\theta)},$$

特别取底圆半径为 $a$ 的圆柱面上曲线表示为：

$$\Gamma: \{x, y, z\} = \{a\cos\theta, a\sin\theta, \sum_{i=0}^{n} \rho_i z_i A_i^n(t)\} \tag{10}$$

其中 $\rho_i = w_i$ 如(6) 定义，由(10) 知 $z(\theta)$ 与圆柱面底圆半径 $a$ 无关.

## 5 圆柱螺线控制顶点反求及算例

在(10) 中取 $z$ 分量左边 $z(\theta) = b\theta = bnt$，即等于(9) 中理论圆柱螺线 $z$ 分量的准确值，得：

$$bnt = \sum_{i=0}^{n} (\rho_i z_i) A_i^n(t) \tag{11}$$

其中 $z_i$ 为待定的控制顶点 $\bar{\rho}_i = (r_i, \theta_i, z_i)$ 的 $z$ 分量. 下面讨论如何待定出 $z_i$ 的值.

在(11) 中，$t \in [-\alpha/2, \alpha/2]$，取 $t = \theta_i / n (i = 0, 1, \cdots, n)$，得：

$$bn\frac{\theta_i}{n} = b\theta_i = \sum_{i=0}^{n} (\rho_i z_i) A_i^n(\frac{\theta_i}{n}) \quad i = 0, 1, \cdots, n \tag{12}$$

(12) 是关于 $z_0, z_1, \cdots, z_n$ 的方程组，解(12) 求出 $z_0, z_1, \cdots, z_n$ 的值并代回(10) 中，得到半径为 $a$ 的逼近圆柱螺线表达式，它在点 $\bar{\rho} = (r_i, \theta_i, b\theta_i), i = 0, 1, \cdots, n$ 处与理论螺线(9) 重合，误差为零.

也可以在(11) 中，让 $t$ 取更多的值满足方程，令

$$t = \frac{\theta_i}{n}, i = 0, 1, \cdots, n \text{ 和 } t = \frac{\theta_i + \theta_{i+1}}{2n}, i = 0, 1, \cdots, n-1,$$

再代入(11)中得到关于 $z_0, z_1, \cdots, z_n$ 的含 $(2n+1)$ 个方程的超定 (矛盾) 方程组：

$$\begin{cases} b\dfrac{\theta_i + \theta_{i+1}}{2} = \sum_{i=0}^{n} (\rho_i z_i) A_i^n(\dfrac{\theta_i + \theta_{i+1}}{2n}) & i = 0, 1, \cdots, n-1 \\ b\theta_i = \sum_{i=0}^{n} (\rho_i z_i) A_i^n(\dfrac{\theta_i}{n}) & i = 0, 1, \cdots, n \end{cases} \tag{13}$$

采用 Householder 变换求超定方程组(13)最小二乘解 $z_0, z_1, \cdots, z_n$，将这些值代回(10)中，得到半径为 $a$ 的逼近圆柱螺线最小二乘表达式.

因为逼近圆柱螺线(10)与理论圆柱螺线(9)之间的偏差仅存在于相应点的 $z$ 坐标上，设其偏差为 $\varepsilon$，则

$$\varepsilon(\theta) = b\theta - z(\theta) \tag{14}$$

下面举例分析.

**例** 取 $\alpha = 2\Delta = \pi/3, n = 6, t \in [-\pi/6, \pi/6], \theta = 6t$，相应权因子为

$$(\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6) = (1, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{7}{20}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, 1),$$

$$(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6) = (-\pi, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi),$$

取 $t = \theta_i/6 = (-\pi/6, -\pi/9, -\pi/18, 0, \pi/18, \pi/9, \pi/6)$，代入(11)解方程组得：

$$z_0 = -\pi, z_1 = -z_5 = -\frac{\pi}{3} - 4\pi\sin^2\frac{\pi}{18}, z_2 = -z_4 = -\frac{\pi}{6} - 4\pi\sin^2\frac{\pi}{18}, z_3 = 0,$$

代回(14)中，取 $b = 1, \theta_i = -\pi + i \cdot \pi/5 \ (i = 0, 1, \cdots, 10)$，其绝对值误差 $|\varepsilon(\theta_i)|$ 见表 1，最小二

乘误差 RMSE = 0.000 05.

表 1 $|\varepsilon(\theta_i)|$ 的绝对值误差

| $\theta_I$ | $-\pi$ | $-4\pi/5$ | $-3\pi/5$ | $-2\pi/5$ | $-\pi/5$ | 0 | $\pi/5$ | $2\pi/5$ | $3\pi/5$ | $4\pi/5$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mid\varepsilon(\theta_i)\mid$ | 0 | 0.000 18 | 0.000 28 | 0.000 17 | 0.000 21 | 0 | 0.000 21 | 0.000 17 | 0.000 28 | 0.000 98 | 0 |

## 6 结束语

圆柱螺线是一类特殊曲线,由于其无理性,不能用 NURBS 精确描述,因此研究其在柱坐标下的 NURBS 逼近,对于建立基于 NURBS 的统一几何模型系统具有十分重要的意义.

### [参考文献]


[1] Sánchez-Reyes J. Single-Valued Curves in Polar Coordinates[J]. Computer-Aided Geometric Design,1990,22(1):19—26.

[2] Sanchez-Reyes J. Single-Valued Surfaces in Spherical Coordinates[J]. Computer-Aided Geometric Design, 1994,11(5):491—517.

[3] Sánchez-Reyes,J. Higher-Order Bézier Circles[J]. Computer-Aided Geometric Design,1997,29(6):469—472.

[4] Piegl L. On NURBS:A Survey[J]. IEEE Comput. Graph. Appl. 1991,11(1):55—71.


# Representing the Helix with NURBS Curves in Cylindrical Coordinates


Sun Yuehong

(College of Mathematics and Computer Science ,Nanjing Normal University,Nanjing,210042,PRC)



**Abstract**:In this paper,we gave the representation of a helix with NURBS curves in cylindrical coordinates. Meanwhile a reversal problem is obtained,which determines the positions of the control vertexes with the approximating curves.



**Key words**:cylindrical coordinates system;helix;NURBS;control vertexes



[责任编辑:陆炳新]