

刚性管内脉动流的温度和速度的径向分布

姚力^{1 2} 李晓卿¹

(1. 南京师范大学物理科学与技术学院, 南京 210097)

(2. 南通医学院数理教研室, 南通 226001)

[摘要] 运用布西内斯库近似, 以刚性轴对称直圆管作为血管模型, 导出了脉动流所满足的基本扰动方程, 并解出脉动流轴向速度和温度的径向分布. 结果表明, 随脉动频率 ω 的增加, 速度和温度的梯度剧烈变化部分将局限在接近管壁的薄层中, 轴心部分则逐渐平坦.

[关键词] 脉动流, 刚性管, 径向分布, 牛顿流体

[中图分类号] O351.2; [文献标识码] A; [文章编号] 1001-4616(2001)01-0069-04

0 引言

在过去的半个世纪中脉动流理论的研究有了相当进展. 50 年代, Womersley^[1]在生理上有意义的参数范围内, 从线性化的流动方程、壁运动方程及边界条件出发, 对血管内流速分布、压力与流量的关系以及脉动波传播特性等方面作了全面、系统的研究分析. 其后, 各种线性和非线性模型不断完善和发展了该理论. 但是, 这些理论模型一般不考虑热传导问题, 认为管内脉动流的温度波动可忽略不计. 采用这种近似研究流场时, 可不用能量方程和状态方程, 使问题得到简化. 然而, 血液是一种能量传输介质, 管内血流的脉动必然会引起温度的波动. 对温度分布的研究有助于了解它与力学量分布的关系, 以及管内热传导问题. 本文以布西内斯库近似^[2] (Boussinesq's approximation)为基础, 建立脉动流所应满足的方程, 并在刚性管条件下, 对管内速度和温度的径向分布作了初步讨论.

1 脉动流方程组的建立及其解

在大尺度动脉中, 血液可看成是不可压缩牛顿流体, 其运动满足线性化的连续性方程、Navier-Stokes 方程和能量方程^[3]. 为了在数学上构成完备的方程组, 引入血液物态方程的一般形式:

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)] \quad (1)$$

其中 α 为体膨胀系数, T_0 是血液在 $\rho = \rho_0$ 时的温度.

考虑到温度的波动会引起血液的密度 ρ 以及粘滞系数 μ 、定容比热 C_V 和导热系数 k 的变化, 运用布西内斯库近似 (1) 血液体膨胀系数 α 很小 ($10^{-3} \sim 10^{-4}$), 在温度波动时, 由于脉动

流单位体积的瞬时加速度 f_i 较大,所以在 Navier-Stokes 方程中 $\rho \cdot f_i$ 项的变化 $\propto (\rho \cdot f_i)$ 不能被忽略 (2) 对粘性应力引起的机械能消耗为二级小量,予以忽略.在以上两近似条件下,对血液的运动方程组作微扰处理^[4],并注意到在脉动流中 (1) 血液的流速 $u_i^{(0)} \ll$ 脉动波速,因此,常取 $u_i^{(0)} \equiv 0$ (2) 温度的零级方程在柱坐标下的解为 $T^{(0)} = T_0 - \beta x$, β 为血管轴向 x 方向温度梯度,可得一级扰动量速度 $u_i^{(1)}$ 、压强 $p^{(1)}$ 和温度 $T^{(1)}$ 所满足的近似方程:

$$\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_i} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial t} = -\alpha T^{(1)} f_i - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} + \tilde{\nu} \cdot \Delta u_i^{(1)} \quad (3)$$

$$\frac{\partial T^{(1)}}{\partial t} + u_j^{(1)} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial x_j} = \tilde{\kappa} \cdot \nabla^2 T^{(1)} \quad (4)$$

其中 $\tilde{\kappa} = \frac{\tilde{k}}{\rho_0 C_V}$ 为热传导系数, $\tilde{\nu} = \frac{\mu}{\rho_0}$ 为运动粘滞系数, f_i 是单位质量上的体积力. 方程组 (2)~(4) 式就是脉动流在布西内斯库近似下所满足的方程.

由于心脏搏动的周期性,根据付里叶定律,有关脉动量均可看成是按正弦规律变化的许多分量之和.取柱坐标系,轴向坐标为 x ,径向坐标为 $y = \frac{r}{R}$,其中 r 为管内任意处的半径, R 为血管内半径.设脉动波的圆频率为 ω ,在刚性管条件近似下,脉动波相速将趋于无穷大,径向速度和加速度应满足 $v^{(1)} \equiv 0$, $f_r \equiv 0$,因此,式(4)左边第二项对 j 的求和中,只有轴向速度 $u^{(1)}$ $\frac{\partial T^{(0)}}{\partial x}$ 项不为零.另外,从连续性方程(2)可知轴向速度 $u^{(1)}$ 仅是 (y, t) 的函数,令 $u^{(1)} = u(y) e^{i\omega t}$, $T^{(1)} = \theta(y) e^{i\omega t}$, $p^{(1)} = p_0 e^{i\omega t}$,代入方程(3)和(4)可得:

$$\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{du}{dy} - ik_1^2 u = a_1 \theta \quad (5)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{d\theta}{dy} - ik_2^2 \theta = -a_2 u \quad (6)$$

其中 $k_1 = R \sqrt{\frac{\omega}{\tilde{\nu}}}$, $k_2 = R \sqrt{\frac{\omega}{\tilde{\kappa}}}$, $a_1 = \frac{\alpha f_x R^2}{\tilde{\nu}}$, $a_2 = \frac{\beta R^2}{\tilde{\kappa}}$.

考虑到速度和温度分布在管内具有轴对称性,以及在管壁上速度为零,并根据解零级温度方程 $T^{(0)}$ 时在管壁上所用的绝热条件,假设方程组的解是如下形式的解的叠加^[2]:

$$u(y) = C J_0(i^{3/2} \lambda y),$$

$$\theta(y) = D J_0(i^{3/2} \lambda y),$$

其中 C 、 D 为常数, λ 为待定常数, J_0 为零阶贝塞尔函数.将以上形式代入方程组(5)和(6),若 C 、 D 有非零解,则其系数行列式必须为零,由此可解出 λ :

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{k_1^2 + k_2^2 + \sqrt{(k_1^2 - k_2^2)^2 + 4a_1 a_2}}{2}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{k_1^2 + k_2^2 - \sqrt{(k_1^2 - k_2^2)^2 + 4a_1 a_2}}{2}},$$

另外两个解与 λ_1 、 λ_2 只相差一负号.由于 J_0 为偶函数,它们不对应新的特征值,这样方程(5) (6) 的解有如下形式:

$$u(y) = C_1 J_0(i^{3/2} \lambda_1 y) + C_2 J_0(i^{3/2} \lambda_2 y) \quad (7)$$

$$\theta(y) = D_1 J_0(i^{3/2} \lambda_1 y) + D_2 J_0(i^{3/2} \lambda_2 y) \quad (8)$$

显然,式(7)(8)满足 $y=0$ 处的轴对称条件.代入 $y=1$ 时的边界条件,并由 C 、 D 的比例关系,可得脉动流在刚性管内速度和温度的径向分布为:

$$u^{(1)} = a_1 \left[J_0(i^{3/2}\lambda_1 y) - \frac{J_0(i^{3/2}\lambda_1)}{J_0(i^{3/2}\lambda_2)} J_0(i^{3/2}\lambda_2 y) \right] e^{i\omega t} \quad (9)$$

$$\theta^{(1)} = (k_1^2 - \lambda_1^2) \left[J_0(i^{3/2}\lambda_1 y) - \frac{\lambda_1 J_1(i^{3/2}\lambda_1)}{\lambda_2 J_1(i^{3/2}\lambda_2)} J_0(i^{3/2}\lambda_2 y) \right] e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})} \quad (10)$$

2 结果与讨论

为了能直观地了解式(9)(10)中脉动量 $u^{(1)}$ 、 $\theta^{(1)}$ 在管内随各参量的变化,并能与 Womersley 的结果对照^[3,5],分别在脉动频率较低($k_1=6.67$, $k_2=5.0$)和较高($k_1=15.0$, $k_2=13.0$)两种情况下,作出不同时刻的速度和温度在管内分布的剖面.如图1~4,曲线1、2、3、4、5分别对应时刻 $\omega t=0$ 、 $\frac{\pi}{4}$ 、 $\frac{\pi}{2}$ 、 $\frac{3\pi}{4}$ 、 π ,其中横坐标为管半径 y ,取值范围是 $0 \sim 1$.由于分布曲线是轴对称,所以图中将另一半曲线对称画出.纵坐标为轴向速度和温度的相对脉动量 $u^{(1)}$ 和 $\theta^{(1)}$,参数 $a_1=1.3$, $a_2=1.0$.图中只画出了半个周期,另外半个周期曲线的形状相同,只是符号相反.

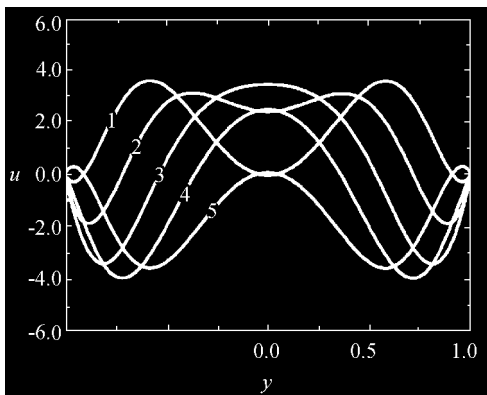


图1 低频脉动时管内流速的剖面图

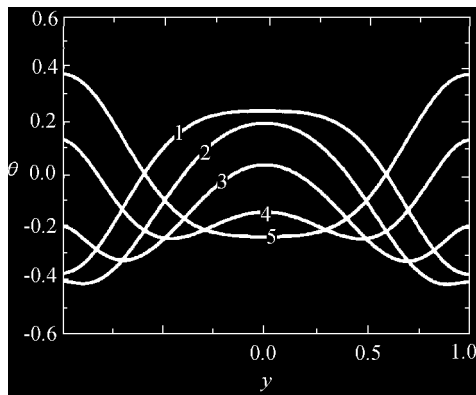


图2 低频脉动时管内温度的剖面图

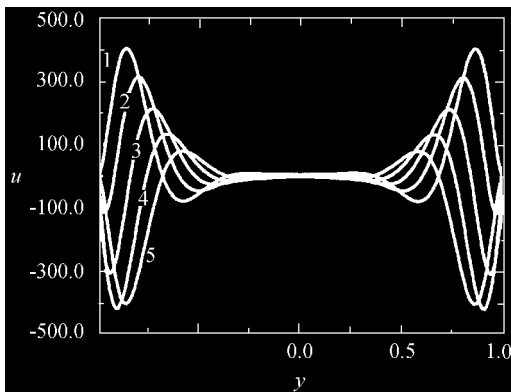


图3 高频脉动时管内流速的剖面图

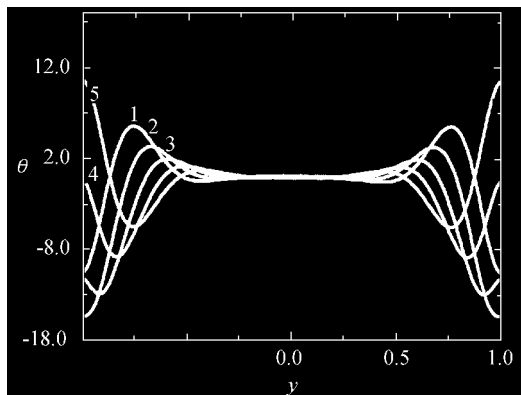


图4 高频脉动时管内温度的剖面图

从图中可以看出,在温度与速度存在耦合时,轴向速度的分布 $u^{(1)}$ 与 Womersley 的结果类似,只是要在较高的脉动频率才能出现轴心平坦的现象,温度也呈现出脉动性。值得注意的是,随着频率 ω 或管半径 R 的增加, k_1 、 k_2 也将增加,速度和温度变化的剧烈部分出现在靠近管壁 ($y = 0.8 \sim 1.0$) 的薄层中,而近轴心部分速度和温度剖面变化则逐渐平坦。也就是说,在管轴心部分流体实际上是无切变的,仅在接近壁面的流层中才有明显的速度梯度,就好像一个固体塞子,在围绕它的粘性液体的薄层中作往返滑动,形成所谓塞子效应(plug effect),出现此效应的频率由图可知比 Womersley 的结果高近 1 倍。

总之,随着频率 ω 的增加,壁面附近速度和温度的梯度将比定常层流高得多,因而脉动流壁面的摩擦阻力远高于泊肃叶流动。由于温度的波动对生理流动的影响机理比较复杂,目前尚待实验验证,所以理论计算的温度分布在生理上会对脉动流产生何种影响还有待进一步研究。

[参考文献]

- [1] Womersley J R. Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube I. the linear approximation for long wav[J]. Phil Mag ,1955 46 :199—221.
- [2] Chandrasekhar S. Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability[M]. New York : Dover publication ,1982.
- [3] 陶祖莱. 生物流体力学[M]. 北京 : 科学出版社 ,1984.
- [4] Chant L J De. A perturbation model for the oscillatory flow of a Bingham plastic in rigid and periodically displaced tube[J]. Trans ASME J Biomech Eng ,1999 ,121(5): 502—504.
- [5] 柳兆荣. 心血管流体力学[M]. 上海 : 复旦大学出版社 ,1986.

Radial Distribution of Temperature and Velocity for Pulsatile Flow in Rigid Tubes

Yao Li^{1 2} ,Li Xiaoqing¹

(1. College of Physical Science and Technology ,Nanjing Normal University ,Nanjing 210097 ,PRC)

(2. Department of Physics ,Nantong Medical College ,Nantong 226001 ,PRC)

Abstract :Based on the Boussinesq's approximation and using an axisymmetric vascular model in rigid tubes ,the basic perturbation equations of pulsatile flow and the radial distribution of the axial velocity and the temperature are derived. The results show that with the increasing of the pulsatile frequency ,the gradient of velocity and temperature is mainly restricted in the near-wall layers ,and gradually smooth in the near-axis region.

Key words :pulsatile flow ;rigid tube ;radial distribution ;Newtonian fluid

[责任编辑 :丁蓉]