投影算子的 Faddeev 型算法的改进

王 波

(南京师范大学数学与计算机科学学院,南京,210097)

[摘要] 给出了投影算子 $P_{AT,S}$ 与 $P_{T,(A^*S^{\perp})^{\perp}}$ 的改进算法.

[关键词] 投影算子;广义逆 $A_{T,S}^{(2)}$;Faddeev 型算法

[中图分类号]O151.21; [文献标识码]A; [文章编号]1001-4616(2001)02-0011-04

0 引言

文[1]的主要结果是给出广义逆 $A_{T,S}^{(2)}$ 的有限算法,然后,在其推论 2.3 中给出了两个投影算子 $P_{AT,S}$ 与 $P_{T,(A^*S^{\perp})^{\perp}}$ 的有限算法.

本文的主要目的是给出不必计算广义逆 $A_{T,S}^{(2)}$ 而直接计算上述两个投影算子的有限算法,从而改进了文[1]推论 2.3 的结果.

引理 1[2] 设 $A\in C_r^{m\times n}$,子空间 $T\subset C^n$,$S\subset C^m$,$\dim T=\dim S^{\perp}=t\leqslant r$,则 A 有满足 $R(X)=T$,$N(X)=S$ 的(2)逆 X 当且仅当

$$AT\oplus S=C^m \tag{1}$$

此时 X 是唯一的,记作 $X=A_{T,S}^{(2)}$.

引理 2[3] 设 A,T,S 如引理 1,并设条件(1)满足,则

$$P_{AT,S}=AA_{T,S}^{(2)}\qquad P_{T,(A^*S^{\perp})^{\perp}}=A_{T,S}^{(2)}A \tag{2}$$

特别,$P_{R(A),S}=AA_{T,S}^{(1,2)}\qquad P_{T,N(A)}=A_{T,S}^{(1,2)}A$ (3)

1 主要结果

定理 1.1 设 A,T,S 如引理 1,并设条件(1)满足,设 $Y\in C^{n\times m}$,满足 $R(Y)=T$,$N(Y)=S$,定义序列 $\{p_j\}$ 与 $\{P_j\}$ 如下:

$$p_0=1,P_0=AY,p_j=\frac{1}{j}\mathrm{tr}(P_{j-1}),P_j=P_0(P_{j-1}-p_jI) \tag{4}$$

$j=1,2,\cdots$

则 $$p_t\neq 0 \tag{5}$$

且 $$P_{AT,S}=\frac{1}{p_t}P_{t-1} \tag{6}$$

证明 由文[1]定理 2.1 知,若定义序列 $\{p_j\}$ 与 $\{B_j\}$ 如下:

收稿日期:2000-12-10

作者简介:王波,1973—,南京师范大学数学与计算机科学学院硕士研究生,从事广义逆矩阵的学习与研究.

$$\tilde{p}_0 = 1, B_0 = I, \tilde{p}_j = \frac{1}{j}\mathrm{tr}(YAB_{j-1}), B_j = YAB_{j-1} - \tilde{p}_j I \tag{7}$$

$j = 1,2,\cdots$

则 $$\tilde{p}_t \neq 0, A^{(2)}_{T,S} = \frac{1}{\tilde{p}_t}B_{t-1}Y \tag{8}$$

往下我们证明 $\tilde{p}_j = p_j, P_j = AB_jY, j = 0,1,2,\cdots$. 实际上,我们已知 $\tilde{p}_0 = p_0 = 1, P_0 = AY = AB_0Y$,分别对序列 $\{B_j\}$ 与 $\{P_j\}$ 用数学归纳法容易得到

$$AB_jY = (AY)^{j+1} - \tilde{p}_1(AY)^j - \tilde{p}_2(AY)^{j-1} - \cdots - \tilde{p}_jAY \tag{9}$$

$$P_j = (AY)^{j+1} - p_1(AY)^j - p_2(AY)^{j-1} - \cdots - p_jAY \tag{10}$$

$j = 0,1,2\cdots$

用数学归纳法且注意到 $\mathrm{tr}(YAB_j) = \mathrm{tr}(AB_jY)$,不难证明 $\tilde{p}_j = p_j, j = 0,1,2\cdots$,进而我们得 $AB_jY = P_j, j = 0,1,2\cdots$. 再由引理2知 $P_{AT,S} = AA^{(2)}_{T,S} = \frac{1}{\tilde{p}_t}AB_{t-1}Y = \frac{1}{p_t}P_{t-1}$. 证毕.

定理1.2　设 A, T, S, Y 如上,定义序列 $\{q_j\}$ 与 $\{Q_j\}$ 如下:

$$q_0 = 1, Q_0 = YA, q_j = \frac{1}{j}\mathrm{tr}(Q_{j-1}), Q_j = Q_0(Q_{j-1} - q_jI) \tag{11}$$

$j = 1,2,\cdots$

则 $$q_t \neq 0 \tag{12}$$

且 $$P_{T,(A^*S^{\perp})^{\perp}} = \frac{1}{q_t}Q_{t-1} \tag{13}$$

证明　由文[1]定理2.2,若定义序列 $\{\tilde{q}_j\}$ 与 $\{C_j\}$ 如下:

$$\tilde{q}_0 = 1, C_0 = I, \tilde{q}_j = \frac{1}{j}\mathrm{tr}(AYC_{j-1}), C_j = AYC_{j-1} - \tilde{q}_jI \tag{14}$$

$j = 1,2,\cdots$

则 $$\tilde{q}_t \neq 0 \text{ 且 } A^{(2)}_{T,S} = \frac{1}{\tilde{q}_t}YC_{t-1} \tag{15}$$

往下和定理1.1类似,用数学归纳法证明 $\tilde{q}_j = q_j, Q_j = YC_jA, j = 0,1,2,\cdots$. 再结合引理2得 $P_{T,(A^*S^{\perp})^{\perp}} = A^{(2)}_{T,S}A = \frac{1}{\tilde{q}_t}YC_{t-1}A = \frac{1}{q_t}Q_{t-1}$ 证毕.

文[1]指出,许多常用的广义逆矩阵均是 $A^{(2)}_{T,S}$ 型的,所以我们容易给出各种常用广义逆的两个投影算子的有限算法的初始矩阵 P_0 与 Q_0.

推论1.1　若用文[1]引理3.1与3.2的假设与记号,则对于各种常用的广义逆 G,相应的投影算子 AG 与 GA 的有限算法中的 P_0 与 Q_0 如表1所示.

表1　P_0、Q_0 的取法

G	A^+	A^+_{MN}	$A_{d,w}$	$(AP_L)^+$	$A^{(d)}$	$A^{(-1)}_{(L)}$	$A^{(+)}_{(L)}$
P_0	AA^*	$AN^{-1}A^*M$	$(WA)^{q+2}$	AQQ^*A^*	A^{q+1}	AEE^*	AQQ^*
Q_0	A^*A	$N^{-1}A^*MA$	$(AW)^{q+2}$	QQ^*A^*A	A^{q+1}	EE^*A	QQ^*A

2　数值例子

[例4]　设

$$A=\begin{bmatrix}0 & 2i & i & 0 & 4+2i & 1\\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & -3-3i\\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4-4i & 1\end{bmatrix},$$

且 $T=R(E)$，$S=R(M)$，这里

$$E=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^*,M=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^*,$$

计算(1) $P_{AT,S}$；(2) $P_{T,(A^*S^{\perp})^{\perp}}$.

解 显然 $\dim T=2$，设 $F=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$，则 $S=N(F)$. 取

$$Y=EF=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^*,$$

则 $R(Y)=T,N(Y)=S$.

(1) $P_0=AY=\begin{bmatrix}i & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

用定理 1.1 中算法，我们有

$$p_1=\mathrm{tr}(P_0)=\mathrm{tr}(AY)=i-3,$$

$$P_1=P_0(P_0-p_1I)=\begin{bmatrix}3i & 0 & 0\\ 0 & 3i & 0\\ 3 & -i & 0\end{bmatrix},$$

$$p_2=\frac{1}{2}\mathrm{tr}(P_1)=3i,$$

从而 $P_{AT,S}=\dfrac{1}{p_2}P_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -i & -1/3 & 0\end{bmatrix}$.

(2)

$$Q_0=YA=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2i & i & 0 & 4+2i & 1\\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & -3-3i\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

用定理 1.2 中算法，我们有

$$q_1=\mathrm{tr}(Q_0)=i-3,$$

$$Q_1=Q_0(Q_0-q_1I)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 6i & 3i & 0 & 12+6i & 3\\ 0 & 0 & 0 & 3i & 6i & 3i-3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$q_2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(Q_1) = 3\mathrm{i},$$

$$P_{T,(A^* S^{\perp})^{\perp}} = \frac{1}{q_2}Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -4\mathrm{i}+2 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1+\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

致谢 :本文得到导师陈永林教授的悉心指导,谨此致谢.

[参考文献]

[1] Chen Yonglin. Finite Algorithms for the (2)-Generalized Inverse $A_{T,S}^{(2)}$[J]. Linear and Multilinear Algebra, 1995, 40: 61—68.

[2] 王国荣. 矩阵与算子广义逆[M]. 北京:科学出版社, 1994.

[3] Kalaba R, *et al*. A new proof for Decell's finite algorithm for generalized inverse[J]. Appl Math Computation, 1983, 12:199—211.

[4] Ben-Israel A, Greville T N E. Generalized Inverses: Theory and Applications [M]. New York: Wiley, 1974.

An Improvement of Faddeev Algorithms for Projectors

Wang Bo

(College of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing, 210097, PRC)

Abstract: In this paper, the Faddeev-type algorithms for the projectors $P_{AT,S}$ and $P_{T,(A^* S^{\perp})^{\perp}}$ given in [1] are improved.

Key words: projector; generalized inverse $A_{(T,S)}^{(2)}$; Faddeev-type algorithm

[责任编辑:陆炳新]