最终有限循环的数论函数

陈凤娟

(南京师范大学数学与计算机科学学院,南京,210097)

[摘要]　数组 {3,146,51,41,102} 和 {74,126,175} 中前一个数的平方的数码平方和等于相邻的后一个数,最后一个数的平方的数码平方和等于数组的第一个数.对任给的自然数 n,$f(n)$ 定义为 n^2 的数码平方和,记 $f_1(n)=f(n)$,$f_k(n)=f(f_{k-1}(n))$,$k\in \mathbf{N}$,N表示自然数集,则一定存在 k_n,当 $k\geqslant k_n$ 时,$f_k(n)\in \{1\}\cup\{3,146,51,41,102\}\cup\{74,126,175\}$,$f(n)$ 的这一性质称为最终有限循环.本文给出了一个数论函数为最终有限循环的充要条件.

[关键词]　数码 数论函数 循环集

[中图分类号]O156；[文献标识码]A；[文章编号]1001-4616(2001)02-0015-03

0　引言

设 $f(n)$ 为定义在 $\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 上的数论函数,N 表示自然数集,记 $f_1(n)=f(n)$,$f_k(n)=f(f_{k-1}(n))$,$k\in\mathbf{N}$.若自然数集的有限子集 $C=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_t\}$ 满足 $f(a_1)=a_2$,$f(a_2)=a_3$,$\cdots$,$f(a_{t-1})=a_t$,$f(a_t)=a_1$,则称 C 为 $f(n)$ 的一个有限循环集.若存在 $f(n)$ 的有限个循环集 $C_1,C_2,\cdots C_r$,满足对任给的自然数 n,总存在 k_n,使得 $f_{k_n}(n)\in C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_r$,则称 $f(n)$ 为最终有限循环的数论函数.如函数:

$$f(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2}, & n \text{ 为偶数}\\ 3n+1, & n \text{ 为奇数}\end{cases}$$

著名的 Collatz 猜想说,对任给的自然数 n,总存在 k_n,使 $f_{k_n}(n)\in\{1,4,2\}$.这一猜想至今仍未被解决,但关于这一猜想有许多研究工作[1,2,3].

在[4] 中,史可富,王明强证明了如下有趣的结果:对自然数 n,定义 $\psi(n)$ 为 n 的数码平方和,则对每一个自然数 n,存在 k_n,使 $\psi_{k_n}(n)\in\{1\}\cup\{4,16,37,58,89,145,42,20\}$,即 $\psi(n)$ 为最终有限循环的数论函数.最近程林凤将 $\psi(n)$ 的定义改为 $\psi(n)=\sum_{i=1}^{t}\varphi(a_i)$,$n=a_t\times10^{t-1}+a_{t-1}\times10^{t-2}+\cdots+a_1$,$\varphi(a)$ 为非负整值函数,同样也证明了 $\psi(n)$ 为最终有限循环的数论函数.

对于任给的数论函数,本文给出了其为最终有限循环的充要条件,并计算了两个有趣的例子.

1　主要定理及证明

定理　设 $f(n)$ 为定义在 $\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 上的数论函数,$f_k(n)$ 为引言中所定义,则 $f(n)$ 为最终有限循环的充要条件为:存在 n_0,当 $n>n_0$ 时,存在 $k_n\in\mathbf{N}$,使得 $f_{k_n}(n)<n$.

证明　设 $f(n)$ 为最终有限循环的数论函数,且 $C_1,C_2,\cdots C_r$ 为 $f(n)$ 的有限个循环集.取

收稿日期:2000-11-16

作者简介:陈凤娟,1977—,女,南京师范大学数学与计算机科学学院硕士研究生,从事代数数论的学习与研究.

$n_0 = \max\{n \mid n \in C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_r\}$，对任给的 $n > n_0$，存在 k_n，$f_{k_n}(n) \in C_1 \cup C_2 \cdots \cup C_r$，即 $f_{k_n}(n) \leqslant n_0 < n$.

反过来，若存在 n_0，当 $n > n_0$ 时，存在 k_n，使 $f_{k_n}(n) < n$. 当 $n > n_0$ 时，由条件知存在 k_n，使得 $f_{k_n}(n) < n$，若 $f_{k_n}(n) > n_0$，则存在 k'_n，使得 $f_{k_n + k'_n}(n) < f_{k_n}(n)$，如此下去，一定存在 k，使得 $f_k(n) \leqslant n_0$，这样我们只要证明对任给的 m，$1 \leqslant m \leqslant n_0$，总存在 $f(n)$ 的循环集 $C(m)$ 及 k_m，使得 $f_{k_m}(m) \in C(m)$.

假定 $1 \leqslant m \leqslant n_0$，若 $f(m) > n_0$，则由上面的讨论知存在 k，使得 $f_{k+1}(m) \leqslant n_0$，所以一定存在序列 $1 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \cdots$，使 $f_{t_j}(m) \leqslant n_0$. 由抽屉原理，存在 $i < j$，使得 $f_{t_i}(m) = f_{t_j}(m)$，取 $C(m) = \{f_{t_i}(m), f_{t_{i+1}}(m), \cdots, f_{t_{j-1}}(m)\}$. 仿此方法我们找到了 $C(1), C(2), \cdots, C(n_0)$.

定理证毕.

2　应用举例

［例 1］　令 $f(n)$ 表示 $2n$ 的数码的平方和，则 $f(n)$ 为最终有限循环函数，且 $\{33, 72\}$，$\{25\}$，$\{149\}$，$\{1, 4, 64, 69, 74, 81, 41, 68, 46, 85, 50\}$ 为 $f(n)$ 的所有循环集.

证明　令 $2n = a_t \times 10^{t-1} + a_{t-1} \times 10^{t-2} + \cdots + a_1$，当 $t \geqslant 4$ 时，$f(n) = a_t^2 + a_{t-1}^2 + \cdots + a_1^2 \leqslant 81t < \frac{1}{2} \times 10^{t-1} \leqslant n$，即当 $n \geqslant 500$，有 $f(n) < n$. 当 $227 \leqslant n < 500$ 时，$f(n) \leqslant f(499) = 9^2 \times 2 + 8^2 = 226 < n$. 当 $155 \leqslant n < 227$ 时，$f(n) \leqslant f(199) = 3^2 + 9^2 + 8^2 = 154 < n$. 当 $150 \leqslant n < 155$ 时，$f(n) \leqslant f(154) = 73 < n$. 当 $n = 149$ 时，$f_k(n) = 149$，$k \in \mathbf{N}$. 当 $133 \leqslant n < 149$ 时，$f(n) \leqslant f(144) = 2^2 + 8^2 \times 2 = 132 < n$. 当 $99 < n < 133$ 时，$f(n) \leqslant f(129) = 93 < n$. 综上知当 $n \geqslant 100$ 且 $n \neq 149$ 时，$f(n) < n$ 恒成立. 当 $n \leqslant 99$ 时，通过具体的计算，求得 $f(n)$ 的所有循环集. 表 1 为简要的计算过程.

表 1　循环群计算过程表

n	99	98	97	96	95	94	93	92	91	90	89	88	87	86	85	84	83	82
$f_{k_n}(n)$	89	49	49	86	82	93	8	81	69	65	72	86	66	54	50	8	73	53
n	81	80	79	78	77	76	75	74	73	72	71	70	69	68	67	66	65	64
$f_{k_n}(n)$	41	37	65	62	42	30	26	41	53	33	21	17	41	46	26	14	10	41
n	63	62	61	60	59	58	57	56	55	54	53	52	51	50	49	48	47	46
$f_{k_n}(n)$	41	21	9	5	14	38	18	6	2	10	37	17	5	1	1	29	1	1
n	45	44	43	52	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28
$f_{k_n}(n)$	41	10	4	37	1	1	10	1	10	10	1	4	33	17	1	10	33	9
n	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10
$f_{k_n}(n)$	1	33	25	10	17	17	20	16	10	1	25	13	9	1	1	1	8	4
n	9	8	7	6	5	4	3	2	1									
$f_{k_n}(n)$	4	4	25	5	1	1	1	1	1									

注：(1) 表中 $f_{k_n}(n)$ 一栏表示第 k_n 步的计算结果. (2) 在运算过程中出现以下三种情形之一即停止. 第一种情形：$f_t(n) < n$. 若 $f(n) > n$，则可从前面的结果中查找直至某一步 $f_t(n) < n$. 第二种情形：$f_t(n) = n$，说明数组 $\{n, f_1(n), f_2(n), \cdots f_{t-1}(n)\}$ 形成 $f(n)$ 的一个循环集. 第三种情形：若 $f_{t_1}(n) = f_{t_2}(n) > n$，则说明 $f_{t_1}(n)$ 已进入前首的一个循环集. 由上表中我们得到 $f(n)$ 的 4 个循环集 $\{33, 72\}$ $\{149\}$ $\{25\}$ $\{1, 4, 64, 69, 74, 81, 41, 68, 46, 85, 50\}$.

［例 2］　令 $g(n)$ 表示 n^2 的数码平方和. 则 $g(n)$ 为最终有限循环数论函数，且其所有循环集为 $\{1\}$，$\{83, 146, 51, 41, 102\}$，$\{74, 126, 175\}$

证明 同例1的方法. 令 $n^2 = a_t \times 10^{t-1} + a_{t-1} \times 10^{t-2} + \cdots + a_1$, $n^2 \geqslant 10^{t-1}$, 当 $t \geqslant 7$ 时, $g(n) \leqslant 9^2 \times t < 10^{\frac{t-1}{2}} \leqslant n$ 恒成立, 即当 $n \geqslant 10^3$ 时, 有 $g(n) < n$ 恒成立. 当 $487 \leqslant n < 10^3$ 时, $g(n) \leqslant 81 \times 6 = 486 < n$. 当 $407 \leqslant n < 487$ 时, $g(n) \leqslant 1^2 + 9^2 \times 5 = 406 < n$. 当 $351 \leqslant n < 407$ 时, $g(n) \leqslant 1^2 + 5^2 + 9^2 \times 4 = 350 < n$. 当 $327 \leqslant n < 351$ 时, $g(n) \leqslant 1^2 \times 2 + 9^2 \times 4 < n$. 当 $314 \leqslant n < 327$ 时, $g(n) \leqslant g(316) = 287 < n$. 当 $n < 314$ 时, 我们仿例1的计算步骤, 借助于平方表具体计算循环集, 本文略去其过程, 给出结果 $\{1\}$, $\{83, 146, 51, 41, 102\}$, $\{74, 126, 175\}$.

3 评注

(1) 由本文的定理知, 许多数论函数为最终有限循环, 如 $f(n)$ 为 n^5 的数码的平方和, 或 $f(n)$ 为 n 的数码和的5次方幂. 但一般说来, 要计算出这些函数的最终有限循环集并不容易.

(2) 我们不知道如下函数是否为最终有限循环的数论函数, 其中 p 为给定的素数.

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{p}, & p \mid n \\ n^{p-1} - 1, & p \nmid n \end{cases}$$

(3) 如果将自然数集 N 换成整数集的一个无穷子集 A, 对定义在 A 上, 取值在 A 中的函数 $f(n)$, 定义相应的 $f_k(n)$ 及最终有限循环的概念同样可以证明如下结论:

f 为最终有限循环的充要条件是存在 $n_0 > 0$, 当 $|n| > n_0$, $n \in A$ 时, 存在 k, 使得 $|f_k(n)| < |n|$.

致谢: 感谢陈永高教授的悉心指导!

[参考文献]

[1] Crandall R E. On the "$3x + 1$" problem Math[J]. Comp, 1978, 32: 1281—1292.
[2] Everelt C J. Iteration of the number-the-oretic function $f(2n) = n$, $f(2n - 1) = 6n + 2$[J]. Advances in Math, 1977, 25: 42—45.
[3] Filipponi P. On the $3n + 1$ problem: Something old, Something new[J]. Rend Math Appl, 1991, 11(7): 85—103.
[4] 史可富, 王明强. 一个关于自然数数码平方和的问题[J]. 曲阜师范大学学报, 1999, 25(4): 45—46.

Finally Finite Cyclic Arithmetic Function

Chen Fengjuan

(College of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing, 210097, PRC)

Abstract: For any one of sequences $\{74, 126, 175\}$ and $\{83, 146, 51, 41, 102\}$, the sum of each digit's square of the square of each term is equal to the next term, the sum of each digit's square of the square of last term is equal to the first term. For every natural number n, let $f_1(n)$ denote the sum of each digit's square of n^2, and let $f_k(n) = f(f_{k-1}(n))$, then there exists an integer k_n, such that as $k \geqslant k_n$, $f_k(n) \in \{1\} \cup \{83, 146, 51, 41, 102\} \cup \{74, 126, 175\}$. Such a property of $f(n)$ is called finally finite cyclic. The following theorem has been proved: $f(n)$ is finally finite cyclic arithmetic function if and only if there exists a positive integer n_0, such that as $n > n_0$, there exists a positive integer k_n, $f_{k_n}(n) < n$.

Key words: digit; arithmetic function; cyclic sequence

[责任编辑: 陆炳新]