关于图的拟拉普拉斯谱的注记

任庆军

(山东临沂师范学院数学系,临沂,276005)

[摘要] 给出正则图的拟拉普拉斯谱的一些性质,研究图的拟拉普拉斯特征值重数的关系,得到 $m_{G\# S_k}(k)=m_G(k)$,$m_{G\wedge P_3}(1)=m_G(1)$.

[关键词] 谱;正则图;连通和;重数

[中图分类号]O157.5; [文献标识码]A; [文章编号]1001-4616(2001)02-0023-03

本文中我们考虑的图是简单无向的,未说明的术语与记号见[1].

设 $G=(V,E)$ 为顶点集 $V=\{v_1,\cdots,v_n\}$,边集 $E=\{e_1,\cdots,e_m\}$ 的简单图.$A(G)$ 定义为一个(0,1)矩阵(a_{ij}),其中 $a_{ij}=1$ 当且仅当 v_i 与 v_j 邻接.$D(G)$ 表示 G 的顶点度对角矩阵.$Q(G)=D(G)+A(G)$.$A(G)$ 和 $Q(G)$ 分别称为图 G 的邻接矩阵与拟拉普拉斯矩阵.显见 $A(G)$ 为实对称矩阵,$Q(G)$ 是实对称半正定矩阵.$A(G)$ 的特征值和 $Q(G)$ 的特征值分别称为图 G 的谱和拟拉普拉斯谱.故我们可按递减顺序表示 $A(G)$ 的特征值为

$$\alpha_0(G)\geqslant\alpha_1(G)\geqslant\cdots\geqslant\alpha_{n-1}(G);$$

按递减顺序表示 $Q(G)$ 的特征值为 $\lambda_0(G)\geqslant\lambda_1(G)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_{n-1}(G)\geqslant 0$.

1 正则图的拟拉普拉斯特征值的一些性质

若 G 是一个 $r-$正则图,则有 $Q(G)=rI+A(G)$.因此对于 $r-$正则图,$A(G)$ 特征值和 $Q(G)$ 的特征值有关系:

$$\lambda_i(G)=r+\alpha_i(G).$$

定理 1.1[2] 图 G 是二分图的充要条件为 $\alpha_i(G)+\alpha_{n-i-1}(G)=0\ (i=0,1,\cdots,n-1)$.

从定理 1.1 对正则图我们有:

定理 1.2 一个 $r-$正则图 G 是二分图的充要条件为 $\lambda_i(G)+\lambda_{n-i-1}(G)=2r$.

定理 1.3[2] 若 G 是一个 $r-$正则图(阶数 $\geqslant 2$),则

(1) $\alpha_i(G)+\alpha_{n-i}(\overline{G})=-1$;

(2) $\alpha_0(G)=r$,且其重数等于 G 的连通分支的个数;

(3) $r-n\leqslant\alpha_i(G)\leqslant r$;

(4) $\max\{r-n,-r\}\leqslant\alpha_{n-1}(G)\leqslant -1$;

(5) $\alpha_k(G)\leqslant r-1,k\in\{n-r,\cdots,n-1\}$;

收稿日期:2001-01-01

基金项目:山东省教育厅科技发展计划项目(编号 JOOP55)

作者简介:任庆军,1962—,山东临沂师范学院数学系讲师,从事离散数学的教学与研究.

(6)$\alpha_1(G) = 0$ 的充要条件为 G 是完全 k 分图($k < n$);

(7)$\overline{G}$ 是二分图,则 $\alpha_{n-i-1}(\overline{G}) = \alpha_{n-i}(G) + 1$;

(8) 若 G 至少四个顶点,则 $\alpha_2(G) \geqslant -1$;

(9)$\alpha_2(G) < 0$,则 $\overline{G}$ 是二分图;

(10) 若 $\alpha_2(G) = -1$,则 $\overline{G}$ 是完全分图加上可能的孤立点.

由定理 2.3 易得:

定理 1.4　若 G 是一个 r – 正则图,则

(1)$\lambda_i(G) + \lambda_{n-i}(\overline{G}) = n - 2$;

(2)$\lambda_0(G) = 2r$ 且其重数等于 G 的连通分支数;

(3)$2r - n \leqslant \lambda_i(G) \leqslant 2r$;

(4)$\max\{2r - n, 0\} \leqslant \lambda_{n-1}(G) \leqslant r - 1$;

(5)$\lambda_k(G) \leqslant 2r - 1, k \in \{n - r, \cdots, n - 1\}$;

(6)$\lambda_1(G) = r$ 的充要条件为 G 是完全 k 分图;

(7)$\overline{G}$ 是二分图,则 $\lambda_{n-i-1}(\overline{G}) = \lambda_{n-i}(G) + n - 2r$;

(8) 若 G 至少有四个顶点,则 $\lambda_2(G) \geqslant r - 1$;

(9)$\lambda_2(G) < r$,则 $\overline{G}$ 是二分图;

(10) 若 $\lambda_2(G) = r - 1$,则 $\overline{G}$ 是完全二分图加上可能的孤立点.

2　$G \# S_k$ 与 G 的拟拉普拉斯特征值的重数间的关系

设 $G_1 = (V_1, E_1)$,$G_2 = (V_2, E_2)$ 是两个顶点集不交的图,G_1,G_2 的连通和 $G_1 \# G_2 = (V, E)$,其中 $V = V_1 \cup V_2$,$E = E_1 \cup E_2 \cup e$,其中与 e 关联的顶点一个在 V_1 中,而另一个在 V_2 中,$m_G(\lambda)$ 表示 G 的拟拉普拉斯特征值 λ 的重数. $S_k = K_{1,k-1}$,则易知,$(1, 1, \cdots, k - 1)$ 是 $Q(S_k)$ 对应于特征值 k 的一个特征向量.

定理 2.1　设 G 是 n 阶非空图,$H = G \# S_k$,$k > 1$,则 $m_G(k) = m_H(k)$.

证明　顶点按以下编号:$H = G \# S_k$ 是连接 G 的最后一个顶点与 S_k 的第一个顶点而得到. 设 $Q = Q(G)$,$Q_* = Q(S_k)$,$Q_\# = Q(H)$,由顶点的显见顺序,我们有:

$$Q_\# = (Q \dotplus Q_*) + A,$$

这里 $A = (a_{ij})$ 是 $(n + k) \times (n + k)$ 矩阵,其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, 若 (i, j) \in \{(n, n), (n + 1, n + 1), (n, n + 1), (n + 1, n)\}; \\ 0, 否则. \end{cases}$$

$w = (w_1, \cdots, w_n)^t$ 是 Q_* 对应于特征值 k 的特征向量,我们可选定 $w_1 = 1$,我们将利用 w 产生 $\mathrm{Ker}(Q - kI_n)$ 到 $\mathrm{Ker}(Q_\# - kI_{n+k})$ 的一个线性双射 $u \to u_\#$. 对 $x \in \mathbf{R}^n$ 与 $y \in \mathbf{R}^k$,用 $x \oplus y$ 表示它们的毗邻. 则对 $u \in \mathbf{R}^n$,$u = (u_1, \cdots, u_n)^t$ 定义 $u_\# = u \oplus (-u_n) w$. 显见 $u \to u_\#$ 是线性一一的. 因 $u_\#$ 的第 n 个与第 $n + 1$ 个坐标互为相反数,$Au_\# = 0$,从而 $Q_\# u_\# = Qu \oplus (-u_n) Q_* w$,每当 u 是 Q 对应于特征值 k 的特征向量,$u_\#$ 就是 $Q_\#$ 对应于特征值 k 的特征向量. 余下来需证明 $Q_\#$ 对应于 k 的特征向量对某 $u \in \mathrm{Ker}(Q - kI_n)$ 是 $u_\#$ 的形式. 假定 $x \in \mathbf{R}^n$,$y \in \mathbf{R}^k$ 且 $x \oplus y$ 是 $Q_\#$ 对应于 k 的特征向量. 我们首先断定 y 是 w 的倍数,考虑两种情况:

情况 1　S_k 的第一个顶点是悬挂点,在这种情况,我们可以假定 S_k 的顶点顺序是第 k 个顶

点有度 $k-1$,而 $w=(1,1,\cdots,k-1)^t$.我们阐明 $y=y_1w$.对 $1<i<k$(当 $k>2$),我们从 $Q_\#(x\oplus y)=k(x\oplus y)$ 的第 $n+i$ 行断定 $y_k=(k-1)y_i$.对第 $n+k$ 行类似,$y_1+y_2+\cdots+y_{k-1}+(k-1)y_k=ky_k$,它也有 $(k-1)y_1=y_k$,从而有 $y=y_1w$.

情况 2 S_k 的第一个顶点有度 $k-1$,在这种情况,$w_1=1$,$w_2=\cdots=w_k=\dfrac{1}{k-1}$(当 $k=2$,两种情况一致).我们用相同的理由可推出 $(k-1)y_i=y_1(i=2,\cdots,k)$,因此 $y=y_1w$.

我们已表明 $\mathrm{Ker}(Q_\#-kI_{n+k})$ 是由 $x\oplus cw$ 形成的,余下来仅须表明 $c=-x_n$ 且 $x\in\mathrm{Ker}(Q-kI_n)$.而 $k(x\oplus cw)=Q_\#(x\oplus cw)=(Qx\oplus kcw)+(0,\cdots,0,x_n+c)^t\oplus(x_n+c,0,\cdots,0)^t$,我们比较第 $n+1$ 行有 $kc=kc+x_n+c$,从而 $c=-x_n$,最后比较前 n 行推出 $Qx=kx$.

我们用 $G\wedge P_3$ 表示 G 的某一顶点与 P_3 的悬挂点相连而得到的图.

定理 2.2 设 G 是 n 阶非空图,$H=G\wedge P_3$,则 $m_G(1)=m_H(1)$.

证明 设 P_3 的第二个顶点为二度点,则 $w=(1,0,-1)$ 是 $Q(P_3)$ 对应于特征值 1 的特征向量.设 $H=G\wedge P_3$ 是由 G 的最后一个顶点连接 P_3 的第一个顶点而得.设 Q、Q' 与 $\tilde{Q}$ 分别表示 G,P_3 与 H 的拟拉普拉斯矩阵.则由定理 2.1 的证明,$\tilde{Q}=(Q\dotplus Q')+A$,这里 $A=0_{n-1}\dotplus\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\dotplus 0_2$.

由定理 2.1 的证明,事实表明映射 $u\to u\oplus(-u_n)w$ 是 $\mathrm{Ker}(Q-I_n)$ 到 $\mathrm{Ker}(\tilde{Q}-I_{n+3})$ 的线性双射,如果 $x\oplus y$ 是 $\tilde{Q}$ 对应于特征值 1 的特征向量,则有 $y_2=0$ 且 $y_3=-y_1$,由定理 2.1 的证明我们有结论 $y=-x_nw$,因此,$x\oplus y=x\oplus(-x_n)w$,这里 $x\in\mathrm{Ker}(Q-I_n)$,故定理结论成立.

[参考文献]

[1] Bigge N L. Algebraic Graph Theory [M]. Cambridge:Cambridge Univ,Press,1974.

[2] Alexander Kelmans,Xuerong Yong. On the distribution of eigenvalues of graphs [J]. Discrete Mathematics,1999,251—258.

[3] Cvetkovic D M,Doob M,Sachs H. Spectra of Graphs [M]. New York:Academic Press,1980.

Note the Quasi-Laplacian Spectra of Graphs

Ren Qingjun

(Department of Mathematics,Linyi Teachers College,Linyi,276005,PRC)

Abstract:This paper give some properties of the quasi-Laplacian spectra of graphs,investigate relation of the multiplicity of eigenvalues of graphs,show $m_{G\# S_k}(k)=m_G(k)$,$m_{G\wedge P_3}(1)=m_G(1)$.

Key words:spectrum;regular graph;connected sum;multiplicity

[责任编辑 陆炳新]