一类单项式与正规族

张太忠[1],朱建国[2]

(1.南京师范大学数学与计算机科学学院,南京,210097)
(2.南京工业职业技术学院数学教研室,南京,210016)

[摘要] W.Doeringer,C.C.Yang,杨乐,王跃飞,宋国栋等学者曾研究过一类形如 $f^j(f^{(k)})^n$ 单项式的模分布问题,本文研究与之相应的正规定则.例子表明本文的正规定则中对函数零点重级的限制是必要的和精确的.

[关键词] 亚纯函数;正规族;单项式
[中图分类号]O174.52; [文献标识码]A; [文章编号]1001-4616(2001)03-0007-03

国内外许多学者曾研究过单项式 $f^j(f^{(k)})^n$ 的模分布问题.

定理 1 设 $f(z)$ 为平面上超越亚纯函数,j,n,k 为正整数,则:

(1)当 $j\geqslant3,n\geqslant1,k\geqslant1$ 时,$f^j(f^{(k)})^n$ 取任何非零有穷复值无穷多次(Doeringer[1]);

(2)当 $j=2,n\geqslant2,k\geqslant2$ 时,$f^j(f^{(k)})^n$ 取任何非零有穷复值无穷多次(C.K.Tse and C.C.Yang[2]);

(3)当 $j=1,n\geqslant2,k\geqslant1$ 时,$f^j(f^{(k)})^n$ 取任何非零有穷复值无穷多次(杨重骏,杨乐和王跃飞[3],张中发和宋国栋[5]).

本文研究与定理 1 相应的正规定则问题,得到:

定理 2 设区域 D 上的全纯函数 $a(z)\neq0$,j,n,k 为正整数,区域 D 上的一个亚纯函数族 F 是正规的,如果对于族 F 中每个函数 f,只有至少 k 级零点,且在 D 内恒满足下列条件之一:

(1)当 $j\geqslant3,n\geqslant1,k\geqslant1$ 时,$f^j(f^{(k)})^n\neq a$;

(2)当 $j=2,n\geqslant2,k\geqslant2$ 时,$f^2(f^{(k)})^n\neq a$;

(3)当 $j=1,n\geqslant2,k\geqslant1$ 时,$f(f^{(k)})^n\neq a$.

一个不正规的例子 $\{nz^{k-1}:n,k\in\mathbf{N}\}$(在原点附近考虑)表明本文定理 2 对函数零点重级的限定是必要的和精确的.

另一个不正规的例子 $\left\{\frac{1}{nz}:n\in\mathbf{N}\right\}$(同样在原点附近考虑)表明定理 2 中的全纯函数 $a(z)$ 不能换为常数零.

Hayman[4]提出一个关于正规族的猜测如下:

Hayman 猜测 亚纯函数族 F 是正规的,如果 F 内每一个函数 f 都满足 $f^jf'\neq a$,其中 j 是给定的正整数,a 是给定的非零有穷复数.

Hayman 猜测已被庞学诚[10]($j\geqslant2$),陈怀惠和方明亮[9]($j\geqslant1$)所解决.

容易看出,定理 2 试图推广 Hayman 猜测,因而是有意义的.特别是当定理 1 中 $k=1$ 情形

收稿日期:2000-10-25
基金项目:江苏省教育厅高校科研项目(00KJB110004)
作者简介:张太忠,1967—,南京师范大学数学与计算机科学学院副教授,博士,从事亚纯函数值分布理论研究.

结论正确时,本文方法可以使得定理 2 中 $k=1$ 情形结论亦正确,而这正是 Hayman 猜测的推广.

本文采用 Nevanlinna 理论中的标准记号[6].

1 几个引理

引理 1 设 $f(z)$ 为平面上的亚纯函数,a 为非零有穷复数,j,n,k 为自然数,若 $f(z)$ 满足下列条件之一,则 $f(z)$ 必蜕化为常数.

(1) 当 $j\geqslant 3,n\geqslant 1,k\geqslant 1$ 时,$f^j(f^{(k)})^n\neq a$;

(2) 当 $j=2,n\geqslant 2,k\geqslant 2$ 时,$f^2(f^{(k)})^n\neq a$;

(3) 当 $j=1,n\geqslant 2,k\geqslant 1$ 时,$f(f^{(k)})^n\neq a$;

证明 若 $f(z)$ 不为常数,由定理 1 知 $f(z)$ 不可能为超越函数,而当 $f(z)$ 为有理函数时不满足引理 1 中(1)(2)(3)式. 引理 1 证完.

引理 2 引理 1 的条件(1)(2)(3)分别换为:

(a) 当 $j\geqslant 3,n\geqslant 1,k\geqslant 1$ 时,$f^j(f^{(k)})^n\equiv a$;

(b) 当 $j=2,n\geqslant 2,k\geqslant 2$ 时,$f^2(f^{(k)})^n\equiv a$;

(c) 当 $j=1,n\geqslant 2,k\geqslant 1$ 时,$f(f^{(k)})^n\equiv a$,

则结论也成立.

证明 以条件(a)为例加以证明,其余类似. 若 $f(z)$ 非常数,则由条件(a)易知 $1/f$ 为整函数并且

$$f^{n+j}\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right)^n=a,$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{n+j}=\frac{1}{a}\left(\frac{f^{(k)}}{f}\right)^n,$$

从而

$$(n+j)T\left(r,\frac{1}{f}\right)=(n+j)m\left(r,\frac{1}{f}\right)\leqslant\log^+\frac{1}{|a|}+nm\left(r,\frac{f^{(k)}}{f}\right)$$
$$=0(T(r,f)),r\to\infty,$$

至多除去一个线性测度有穷的关于 r 的集合成立. 矛盾. 引理 2 证完.

下述 L. Zdcman 引理[7]的推广是不久前由陈怀惠和顾永兴[8]建立的.

引理 3 设 k 是一个正整数,F 是区域 D 上的一个亚纯函数族,其中每一个函数只有至少 k 级的零点. 如果 F 在点 $z_0\in D$ 不正规,则对于任意的 $\alpha\in(0,k)$,存在 D 中的点列 z_n,正数序列 ρ_n,F 中的函数序列 f_n 使得 $z_n\to z_0$,$\rho_n\to 0$,而 $\rho_n^{-\alpha}f_n(z_n+\rho_n\zeta)$ 在任意圆 $\{|\zeta|\leqslant R\}$ 上按照球面距离一致收敛到 ζ 平面上一个非常数亚纯函数.

2 定理 2 的证明

假定族 F 在 $z_0\in D$ 不正规. 取 $\alpha=\frac{nk}{n+j}$,则 $0<\alpha<k$,由陈怀惠和顾永兴的一个结果(即引理 3)知,存在相应于 α 的 D 中的点列 $z_m\to z_0$,正数序列 $\rho_m\to 0$ 及函数序列 $f_m\in F$,使得

$$g_m(\zeta)=\rho_m^{-\alpha}f_m(z_m+\rho_m\zeta)$$

在任意圆 $\{|\zeta|\leqslant R\}$ 上按照球面距离一致收敛到平面上一个非常数亚纯函数 $g(\zeta)$. 由引理 1

知:一定存在 $\zeta_0 \in C$ 使

$$g^j(\zeta_0)(g^{(k)}(\zeta_0))^n - a(z_0) = 0 \tag{1}$$

且易知 $g(\zeta_0) \neq 0, \infty$. 经计算有

$$g_m^j(\zeta)(g_m^{(k)}(\zeta))^n - a(z_m + \rho_m\zeta) = f^j(z_m + \rho_m\zeta)(f_m^{(k)}(z_m + \rho_m\zeta))^n - a(z_m + \rho_m\zeta) \neq 0.$$

而上式最左端内闭一致收敛于 $g^j(\zeta)(g^{(k)}(\zeta))^n - a(z_0)$,由 Hurwitz 定理知此式或者恒为 0,或者恒不为 0. 由(1)式知 $g^j(\zeta)(g^{(k)}(\zeta))^n - a(z_0) \equiv 0$,这与引理 2 矛盾. 定理 2 证完.

[参考文献]

[1] Doeringer W. Exceptional values of differential polynomials[J]. Pacific J. Math., 1982, 98(1): 55~62.

[2] Tse C K, Yang C C. On the value distribution of $f^j(f^{(k)})^n$[J]. Kodai Math. J, 1994, 17(1): 163~169.

[3] 杨重骏,杨乐,王跃飞. 关于 $(f^{(k)})^n f - a$ 的零点[J]. 科学通报, 1993, 38(24): 2215—2218.

[4] Hayman W K. Research problems in function theory[M]. London: Athlone Press, University of London, 1967.

[5] 张中发,宋国栋. 关于 $f(f^{(k)})^n - a(z)$ 的零点[J]. 数学年刊, 1998, 19A(2): 275—282.

[6] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[7] Zalcman L. A heuristic principle in complex function theory[J]. Amer. Math. Monthly, 1972, 82: 813—817.

[8] 陈怀惠,顾永兴. Improvement of Marty's criterion and its applications[J]. Science in China, Series A. 1993, 36(6): 674—681.

[9] 陈怀惠,方明亮. 关于 $f^n f'$ 的值分布[J]. 中国科学(A 辑), 1995, 38(2): 121—127.

[10] 庞学诚. Bloch 原理和正规定则[J]. 中国科学(A 辑), 1988, 31(11): 1153—1159.

A Class of Monomials and Normal Families

Zhang Taizhong[1], Zhu Jianguo[2]

(1. School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing, 210097, PRC)

(2. Department of Mathematics, Nanjing Institute of Industry and Technology, Nanjing, 210016, PRC)

Abstract: W. Doeringer, C. C. Yang, Yang Lo, Wang Yuefer, Song Guodong etc studied ever the modular value distributions of a class of monomials such as $f^j(f^{(k)})^n$, the paper studies the corresponding problem on normal criteria. Examples show that the constriction to the orders of zeros of functions at the paper's normal criteria is necessary and precise.

Key words: meromorphic function; normal family; monomial

[责任编辑: 陆炳新]