

加权总体最小二乘问题的可解性及其原始解集

严涛, 尤兴华

(南京师范大学数学与计算机科学学院, 南京 210097)

[摘要] 给出了加权总体最小二乘(WTLS)问题可解的充分必要条件,并在它可解时,给出了它的原始 TLS 解集及极小范数解的显式公式.

[关键词] 加权总体最小二乘;充分必要条件;TLS 解集

[中图分类号] O241.5 [文献标识码] A; [文章编号] 1001-4616(2001)03-0010-07

0 引言

Golub 和 Van Loan^[1]在对总体最小二乘问题进行研究的同时,也对加权总体最小二乘(WTLS)问题进行了讨论.此后,文[2]对 WTLS 问题进行了进一步讨论和分析.本文在其基础上首次给出了 WTLS 问题可解的充分必要条件及其原始解集.这里解的定义由 Golub 和 Van Loan 1980 给出,称之为原始解,与[2]中解的定义不同.

加权总体最小二乘问题定义如下:

$$\begin{cases} \min_{\Delta A, \Delta B} \|D(\Delta A, \Delta B)T\|_F \\ s. t. R(B + \Delta B) \subset R(A + \Delta A) \end{cases} \quad (I)$$

其中 $A, \Delta A \in C^{m \times n}$; $B, \Delta B \in C^{m \times d}$, $D \in C^{m \times m}$, $T_1 \in C^{n \times n}$, $T_2 \in C^{d \times d}$, $T = \text{diag}(T_1, T_2)$, 且 D, T_1, T_2 非奇异.

设 (DAT_1, DBT_2) 的奇异值分解为:

$$(DAT_1, DBT_2) = U\Sigma V^H \quad (1)$$

其中 $U \in C^{m \times m}$, $V \in C^{(n+d) \times (n+d)}$ 为酉阵, $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n+d})$, 且

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_s > \sigma_{s+1} = \dots = \sigma_{n+1} = \dots = \sigma_t > \sigma_{t+1} \geq \dots \geq \sigma_{n+d}$$

为奇异值. 给定 $\{1, 2, \dots, n+d\}$ 和 V 的分块如下:

$$\begin{aligned} S &= \{1, 2, \dots, s\}, T = \{s+1, s+2, \dots, t\}, I = \{t+1, t+2, \dots, n+d\} \\ V &= \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \end{pmatrix} \begin{matrix} n \\ d \end{matrix} \end{aligned} \quad (2)$$

$s \quad t-s \quad n+d-t$

1 WTLS 的可解性

引理 1 (DAT_1, DBT_2) 的奇异值分解为(1), $\{1, 2, \dots, n+d\}$ 及 V 的分块如(2), M_0 为列正交

阵且使得 $\|(DAT_1, DBT_2)M_0\|_F = \left(\sum_{j=n+1}^{n+d} \sigma_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 则 M_0 可表示为：

$$M_0 = \begin{pmatrix} V_{12} & V_{13} \\ V_{22} & V_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix}.$$

其中 $Z_2^H Z_2 + Z_3^H Z_3 = I_d, Z_3 Z_3^H = I_{n+d-t}$.

证明 设 $M_0 = VZ$ 其中 Z 为列正交阵 且

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix}, \quad Z_1^H = (z_1 \dots z_s),$$

$$Z_2^H = (z_{s+1} \dots z_t), \quad Z_3^H = (z_{t+1} \dots z_{n+d}).$$

令 $u_j = z_j^H z_j, j = 1, 2, \dots, n+d$ 因为 Z 为列正交阵 则有 $0 \leq u_j \leq 1, j = 1, \dots, n+d$. 则：

$$\begin{aligned} \|(DAT_1, DBT_2)M_0\|_F^2 &= \text{tr}\left(\sum_{j=1}^{n+d} \sigma_j^2 z_j z_j^H\right) = \sum_{j=1}^{n+d} \sigma_j^2 z_j^H z_j = \sum_{j=1}^{n+d} \sigma_j^2 u_j \\ &= \sum_{j=n+1}^{n+d} \sigma_j^2 + \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 u_j - \sum_{j=n+1}^{n+d} \sigma_j^2 (1 - u_j) \\ &\geq \sum_{j=n+1}^{n+d} \sigma_j^2 + \sigma_{n+1}^2 \sum_{j=1}^n u_j - \sigma_{n+1}^2 \sum_{j=n+1}^{n+d} (1 - u_j) \\ &= \sum_{j=n+1}^{n+d} \sigma_j^2. \end{aligned}$$

(a) 若存在 $u_j > 0, j \in S$ 则

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 u_j &> \sigma_{n+1}^2 \sum_{j=1}^n u_j = \sigma_{n+1}^2 \left(\sum_{j=1}^{n+d} u_j - \sum_{j=n+1}^{n+d} u_j \right) \\ &= \sigma_{n+1}^2 \left(d - \sum_{j=n+1}^{n+d} u_j \right) = \sigma_{n+1}^2 \sum_{j=n+1}^{n+d} (1 - u_j) \\ &\geq \sum_{j=n+1}^{n+d} \sigma_j^2 (1 - u_j). \end{aligned}$$

(b) 若存在 $u_j < 1, j \in I$ 则

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 u_j &\geq \sigma_{n+1}^2 \sum_{j=1}^n u_j = \sigma_{n+1}^2 \left(d - \sum_{j=n+1}^{n+d} u_j \right) \\ &= \sigma_{n+1}^2 \sum_{j=n+1}^{n+d} (1 - u_j) > \sum_{j=n+1}^{n+d} \sigma_j^2 (1 - u_j). \end{aligned}$$

则若出现 (a) (b) 两种情形 皆有 $\|(DAT_1, DBT_2)M_0\|_F \neq \left(\sum_{j=n+1}^{n+d} \sigma_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 所以

$$\begin{aligned} \|(DAT_1, DBT_2)M_0\|_F &= \left(\sum_{j=n+1}^{n+d} \sigma_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 u_j = \sum_{j=n+1}^{n+d} \sigma_j^2 (1 - u_j) \\ &\Leftrightarrow u_j = \begin{cases} 0 & j \in S \\ 1 & j \in I \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} Z_1 = 0 \\ Z_3 Z_3^H = I_{n+d-t} \end{cases} \end{aligned}$$

则

$$M_0 = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{12} & V_{13} \\ V_{22} & V_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix}.$$

其中 $Z_2^H Z_2 + Z_3^H Z_3 = I_d, Z_3 Z_3^H = I_{n+d-t}$.

定理 1 对于 WTLS 问题 (1) (DAT_1, DBT_2) 的奇异值分解为 (1), V 的分块如 (2), 则 WTLS 问题 (1) 可解的充分必要条件为 V_{11} 和 V_{23} 皆列满秩.

证明 必要性. 若 (1) 可解, 记相应的最优解为 $(\overline{A}, \overline{B})$, 由 [1] 可知:

$$\|D(\overline{A}, \overline{B})T\|_F = \left(\sum_{j=n+1}^{n+d} \sigma_j^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

且存在 TLS 解 X 使得:

$$D(A + \overline{A}, B + \overline{B})T^{-1} \begin{pmatrix} X \\ -I_d \end{pmatrix} = 0.$$

$$\text{即 } D(A + \overline{A})T_1, D(B + \overline{B})T_2 \begin{pmatrix} T_1^{-1}XT_2 \\ -I_d \end{pmatrix} = 0$$

两边右乘 $I_d + (T_1^{-1}XT_2)^H(T_1^{-1}XT_2)^{-\frac{1}{2}}$, 记

$$M_0 = \begin{pmatrix} T_1^{-1}XT_2 \\ -I_d \end{pmatrix} [I_d + (T_1^{-1}XT_2)^H(T_1^{-1}XT_2)^{-\frac{1}{2}}] \quad (3)$$

则 M_0 为列正交阵, 且

$$(DAT_1, DBT_2)M_0 = -(D\overline{A}T_1, D\overline{B}T_2)M_0,$$

所以

$$\|(DAT_1, DBT_2)M_0\|_F \leq \|(D\overline{A}T_1, D\overline{B}T_2)M_0\|_F = \left(\sum_{j=n+1}^{n+d} \sigma_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

由 Wielandt 定理有

$$\min_{\substack{M \in C^{(n+d) \times d} \\ M^H M = I_d}} \|(DAT_1, DBT_2)M\|_F = \left(\sum_{j=n+1}^{n+d} \sigma_j^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{即 } \|(DAT_1, DBT_2)M_0\|_F \geq \left(\sum_{j=n+1}^{n+d} \sigma_j^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\text{因此 } \|(DAT_1, DBT_2)M_0\|_F = \left(\sum_{j=n+1}^{n+d} \sigma_j^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

则有引理 1 可知

$$M_0 = \begin{pmatrix} V_{12} & V_{13} \\ V_{22} & V_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix},$$

其中 $Z_2^H Z_2 + Z_3^H Z_3 = I_d, Z_3 Z_3^H = I_{n+d-t}$. 因为 M_0 的下角 $d \times d$ 阶子阵是可逆的, 则

$$\text{Rank}(V_{22}, V_{23}) = d \quad (4)$$

同时对于 $\begin{pmatrix} Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix}$, 存在酉阵 $Q \in C^{d \times d}$, 列正交阵 $U \in C^{(t-s) \times (t-n)}$, 使得:

$$\begin{pmatrix} Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & I_{n+d-t} \end{pmatrix} Q,$$

则

$$M_0 = \begin{pmatrix} V_{12} & V_{13} \\ V_{22} & V_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & I_{n+d-t} \end{pmatrix} Q \quad (5)$$

$$\text{即 } M_0 Q^H = \begin{pmatrix} V_{12} & V_{13} \\ V_{22} & V_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & I_{n+d-t} \end{pmatrix}.$$

上式右端右下角 $d \times (n + d - t)$ 子阵即为 V_{23} , 而左端下方 $d \times d$ 子阵可逆, 所以

$$\text{Rank}(V_{23}) = n + d - t \quad (6)$$

则由(4)(6)可知 V_{11} 和 V_{23} 皆为列满秩.

充分性. 因为 V_{11} 和 V_{23} 皆为列满秩, 即 $\text{Rank}(V_{22}, V_{23}) = d$, $\text{Rank}(V_{23}) = n + d - t$, 则可以从 V_{22} 中取 $t - n$ 列, 使其与 V_{23} 形成的矩阵非奇异, 记为 M_0 , 则

$$M_0 = \begin{pmatrix} V'_{12} & V_{13} \\ V'_{22} & V_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{12} & V_{13} \\ V_{22} & V_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & I_{n+d-t} \end{pmatrix},$$

其中 $U = (e_{i_1} \dots e_{i_{t-n}}) \in C^{(t-n) \times (t-n)}$, $i_k (k = 1 \dots t - n)$ 为要取列的指标, $e_{i_k} = (0 \dots 1_{i_k} \dots 0)^T$, 同时, 易知 M_0 为列正交阵, 且

$$\|(DAT_1, DBT_2)M_0\|_F = \left(\sum_{j=n+1}^{n+d} \sigma_j^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

令 $M_0 = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$, 则 $Y_2 = (V_{22}U, V_{23}) = (V'_{22}, V_{23})$ 非奇异.

令 $X = -T_1 Y_1 Y_2^{-1} T_2^{-1} (\overline{\Delta A} \quad \overline{\Delta B}) = -(A, B) T \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} (Y_1^H, Y_2^H) T^{-1}$, 则

$$\begin{aligned} (\overline{\Delta A} \quad \overline{\Delta B}) \begin{pmatrix} X \\ -I_d \end{pmatrix} &= -(A, B) T \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} (Y_1^H, Y_2^H) T^{-1} \begin{pmatrix} -T_1 Y_1 Y_2^{-1} T_2^{-1} \\ -I_d \end{pmatrix} \\ &= -(A, B) T \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} (Y_1^H, Y_2^H) T^{-1} \begin{pmatrix} T_1 Y_1 \\ T_2 Y_2 \end{pmatrix} (-Y_2^{-1} T_2^{-1}) \\ &= -(A, B) T \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} (-T_2 Y_2)^{-1} \\ &= -(A, B) \begin{pmatrix} -T_1 Y_1 Y_2^{-1} T_2^{-1} \\ -I_d \end{pmatrix} \\ &= -(A, B) \begin{pmatrix} X \\ -I_d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|D(\overline{\Delta A} \quad \overline{\Delta B})T\|_F &= \|-(A, B) T \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} (Y_1^H, Y_2^H)\|_F \\ &= \|(DAT_1, DBT_2) \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}\|_F = \left(\sum_{j=n+1}^{n+d} \sigma_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

$(\overline{\Delta A} \quad \overline{\Delta B})$ 为 WTLS 问题的解.

3 WTLS 的解集和极小 F 范数解

引理 2^[3] 设 $A \in C^{m \times n}$, $B \in C_k^{m \times k} (m > k)$, 则存在矩阵 $U \in C_{m-k}^{n \times (m-k)}$, 使得 (AU, B) 非
 万方数据

奇异的充分必要条件为 $\text{Rank}[(I - BB^+)A] = m - k$.

以下假设 WTLS 问题可解. 由定理 1 必要性证明过程知, 若 X 为 WTLS 问题的 TLS 解, 则由 (3) 和 (5) 得 $T_1^{-1}XT_2 = -(V_{12}U, V_{13} \text{ } V_{22}U, V_{23})^{-1}$, 即

$$X = -T_1(V_{12}U, V_{13} \text{ } V_{22}U, V_{23})^{-1}T_2^{-1} \quad (7)$$

其中 U 为列正交阵, 使得 $(V_{22}U, V_{23})$ 非奇异, 则

$$\begin{pmatrix} T_1^{-1}X \\ -T_2^{-1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} V_{12} & V_{13} \\ V_{22} & V_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} (V_{22}U, V_{23})^{-1}T_2^{-1},$$

则 $(V_{11}^H, V_{21}^H) \begin{pmatrix} T_1^{-1}X \\ -T_2^{-1} \end{pmatrix} = 0$, 即

$$V_{11}^H T_1^{-1}X = V_{21}^H T_2^{-1} \quad (8)$$

又因为 $(V_{22}U, V_{23}) \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} = V_{23}$, 则由 $(V_{22}U, V_{23})^{-1}V_{23} = \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix}$ 及 (7) 知

$$XT_2V_{23} = -T_1V_{13} \quad (9)$$

即 X 为 (8) 和 (9) 的解.

反之, 若 X 为 (8) 和 (9) 的解, 则

$$(V_{11}^H, V_{21}^H) \begin{pmatrix} T_1^{-1}X \\ -T_2^{-1} \end{pmatrix} = 0, \quad \begin{pmatrix} T_1^{-1}X \\ -T_2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{12} & V_{13} \\ V_{22} & V_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}.$$

其中 $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$ 列满秩, 于是

$$T_1^{-1}X = V_{12}P_1 + V_{13}P_2, \quad T_2^{-1} = -(V_{22}P_1 + V_{23}P_2).$$

则

$$T_1^{-1}X = T_1^{-1}XT_2(V_{22}P_1 + V_{23}P_2) = -(V_{12}P_1 + V_{13}P_2).$$

因为 $XT_2V_{23} = -T_1V_{13}$, 则由上式得: $T_1^{-1}XT_2V_{22}P_1 = -V_{12}P_1$,

又因为 $V_{22}P_1 + V_{23}P_2 = (I - V_{23}V_{23}^+)V_{22}P_1 + V_{23}(V_{23}^+V_{22}P_1 + P_2)$ 非奇异, $\text{Rank}(V_{23}) = n + d - t$, 故 $\text{Rank}[(I - V_{23}V_{23}^+)V_{22}P_1] = t - n$, 于是可从 P_1 中取出 $t - n$ 列, 记为 U , 则 $(I - V_{23}V_{23}^+)V_{22}U$ 为列满秩. 因为 $T_1^{-1}XT_2V_{22}P_1 = -V_{12}P_1$ 及 $XT_2V_{23} = -T_1V_{13}$, 则 $T_1^{-1}XT_2(V_{22}U, V_{23}) = -(V_{12}U, V_{13})$. 由引理 2 可知 $(V_{22}U, V_{23})$ 可逆, 则

$$X = T_1(V_{12}U, V_{13} \text{ } V_{22}U, V_{23})^{-1}T_2^{-1},$$

其中 U 使 $(I - V_{23}V_{23}^+)V_{22}U$ 列满秩.

下证 X 为 WTLS 问题的 TLS 解.

令 $M_0 = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{12}U & V_{13} \\ V_{22}U & V_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{12} & V_{13} \\ V_{22} & V_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & I_{n+d-t} \end{pmatrix}$, 则易知

$$\|(DAT_1, DBT_2)M_0\|_F = \left(\sum_{j=n+1}^{n+d} \sigma_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

令 $(\overline{DA} \text{ } \overline{DB}) = -(A, B)T \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} (Y_1^H, Y_2^H)T^{-1}$,

则 $(\overline{DA} \text{ } \overline{DB}) \begin{pmatrix} X \\ -I_d \end{pmatrix} = -(A, B) \begin{pmatrix} X \\ -I_d \end{pmatrix}$, 故 $(A + \overline{DA}, B + \overline{DB}) \begin{pmatrix} X \\ -I_d \end{pmatrix} = 0$, 即

$$(A + \overline{\Delta A})X = B + \overline{\Delta B}.$$

$$\|D(\overline{\Delta A} \ \overline{\Delta B})T\|_F = \|-D(A \ B)T\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}\|_F = \|(DAT_1 \ DBT_2)M_0\|_F = \left(\sum_{j=n+1}^{n+d} \sigma_j^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

故 X 为 WTLS 问题的 TLS 解. 综上所述, 当 WTLS 问题可解时, 它的 TLS 解集为

$$\{X | V_{11}^H T_1^{-1} X = V_{21}^H T_2^{-1}, XT_2 V_{23} = -T_1 V_{13}\}.$$

引理 3^[4] 矩阵方程 $AX = B, XD = E (A \in C^{m \times n}, B \in C^{m \times k}, D \in C^{k \times r}, E \in C^{n \times r})$ 有公共解的充分必要条件是: 每个方程都相容, 及 $AE = BD$, 且极小 F 范数解和一般解表达式如下:

$$X_F = A^+ B + ED^+ - A^+ AED^+ = A^+ B + ED^+ - A^+ BDD^+,$$

$$X = X_F + (I - A^+ A)Y(I - DD^+), \quad \forall Y \in C^{n \times k}.$$

定理 2 若 (I) 可解, 则其极小 F 范数 WTLS 解和 WTLS 解集表示如下:

$$\begin{aligned} X_{\text{WTLS}} &= T_1(V_{11}^H)^+ V_{21}^H T_2^{-1} - T_1 V_{13} V_{23}^+ T_2^{-1} + T_1(V_{11}^H)^+ V_{11}^H V_{13} V_{23}^+ T_2^{-1} \\ &= T_1(V_{11}^H)^+ V_{21}^H (I - V_{23} V_{23}^+) T_2^{-1} - T_1 V_{13} V_{23}^+ T_2^{-1}, \end{aligned}$$

$$S_1 = \{X | V_{11}^H T_1^{-1} X = V_{21}^H T_2^{-1}, XT_2 V_{23} = -T_1 V_{13}\},$$

$$S_2 = \{X | X = X_{\text{WTLS}} + [I - T_1(V_{11}^H)^+ V_{11}^H T_1^{-1}][I - T_2 V_{23} V_{23}^+ T_2^{-1}], \forall Y \in C^{n \times d}\}.$$

证明 因为 T_1 可逆, 则 $\text{Rank}(V_{11}^H T_1^{-1}) = \text{Rank}(V_{11}^H)$, 且 $\text{Rank}(T_2 V_{23}) = \text{Rank}(V_{23})$. 又因

为 (I) 可解, 则 V_{11}, V_{23} 皆列满秩, 即 (8) 和 (9) 皆相容. 且 $(V_{11}^H, V_{21}^H) \begin{pmatrix} V_{13} \\ V_{23} \end{pmatrix} = 0$, 即 $V_{11}^H(-V_{13}) =$

$V_{21}^H V_{23}$. 也即 $(V_{11}^H T_1^{-1})(-T_1 V_{13}) = (V_{21}^H T_2^{-1})(T_2 V_{23})$. 由引理 3 可知 (8) 和 (9) 有公共解, 且:

$$\begin{aligned} X_{\text{WTLS}} &= T_1(V_{11}^H)^+ V_{21}^H T_2^{-1} - T_1 V_{13} V_{23}^+ T_2^{-1} + T_1(V_{11}^H)^+ V_{11}^H V_{13} V_{23}^+ T_2^{-1} \\ &= T_1(V_{11}^H)^+ V_{21}^H (I - V_{23} V_{23}^+) T_2^{-1} - T_1 V_{13} V_{23}^+ T_2^{-1} \end{aligned}$$

同时 $S_1 = S_2$.

4 数值实例

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 1.1957 & 0.5430 \\ -5.7774 & 4.8586 \\ 4.7357 & -4.4561 \\ -0.8862 & 0.4895 \\ -0.2622 & 0.4195 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -30.0484 & 10.1807 \\ 87.2836 & -31.2340 \\ -67.3349 & 24.2674 \\ 22.4871 & -7.9914 \\ -4.0773 & 1.4212 \end{pmatrix}.$$

对 $D(A \ B)T$ 进行奇异值分解, 得: $D(A \ B)T = U \sum V^H$, 其中:

$$U = \begin{pmatrix} 0.0813 & -0.3311 & 0.6463 & -0.2719 & -0.6262 \\ 0.7568 & -0.1027 & -0.3239 & -0.5552 & 0.0594 \\ -0.4927 & 0.3514 & -0.3945 & -0.5512 & 0.4175 \\ -0.3047 & -0.0832 & 0.3953 & -0.5603 & 0.6558 \\ 0.2916 & 0.8657 & 0.4069 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} 0.0779 & -0.5019 & -0.8605 & -0.0356 \\ 0.7929 & -0.1897 & 0.2067 & -0.5409 \\ -0.5115 & -0.6834 & 0.3665 & -0.3701 \\ -0.3213 & 0.4950 & -0.2874 & 0.7544 \end{pmatrix},$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 17.4982 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.4644 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.4644 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

对 V 进行如(2)分块,由定理 1 可知(1)可解.且由定理 2 可知:

$$X_{\text{WTLS}} = \begin{pmatrix} 0.0457 & -0.4457 \\ 0.1686 & -0.4730 \end{pmatrix},$$

且通解为:

$$Y = X_{\text{WTLS}} + \begin{pmatrix} 1.9532 & -2.0761 \\ 0.8967 & -0.9532 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 6.6337 & -2.4102 \\ 15.5062 & -5.6338 \end{pmatrix}, \quad \forall Y \in C^{2 \times 2}.$$

[参考文献]

- [1] Golub G H, Van Loan C F. Matrix Computations[M]. The Johns Hopkins University Press, 1989.
- [2] 魏木生, 陈果良. 加权总体最小二乘问题的分析[J]. 计算数学, 1993, 15(1): 69—79.
- [3] Shijian Yan, Kaibin Huang. The original TLS solution sets of the multidimensional TLS problem[J]. Inter. J. Computer Math, 2000, 173: 349—359.
- [4] 何旭初, 孙文瑜. 广义逆矩阵引论[M]. 南京: 江苏科学技术出版社, 1991.

The Solvability and the Original Set of the Weighted Total Least Squares Problem

Yan Tao, You Xinghua

(School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, PRC)

Abstract In this paper, sufficient and necessary condition of the Weighted Total Least Squares Problem(WTLS) is given. And the original sets of WTLS problem is also given when WTLS problem is soluble.

Key words weighted total least squares; sufficient and necessary condition; the TLS sets

[责任编辑 陆炳新]