一类局部紧的全不连通群上的加权 Hardy-Bessel 位势空间

俞 曼

(南通师范学院数学系,南通,226007)

[摘要] 从几个不同角度刻划了 Vilenkin 群上的加权 Hardy-Bessel 位势空间.

[关键词] Hardy-Bessel 位势空间;Vilenkin 群

[中图分类号]O174.3 [文献标识码]A; [文章编号]1001-4616(2001)03-0017-04

0 引言

本文中 G 表示局部紧的 Abelian 群,$\{G_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ 是 G 的一列子群,满足

(i) G_n 是开紧子群,$\forall n \in Z$;

(ii) $G_{n+1} \subset G_n$ 是 sup {阶(G_n/G_{n+1})} $= A < \infty$;

(iii) $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} G_n = G$,$\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} G_n = \{0\}$.

称这类群为局部紧的 Vilenkin 群.

设 Γ 是 G 的对偶群,$\forall n \in Z$,记 Γ_n 为 G_n 的零化子,则

(i) Γ_n 是 Γ 的开群子群,$\forall n \in Z$;

(ii) $\Gamma_n \subset \Gamma_{n+1}$,且阶$(G_n/G_{n+1})$ = 阶(Γ_{n+1}/Γ_n);

(iii) $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_n = \Gamma$,$\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_n = \{1\}$.

在 G 和 Γ 上分别选取 Haar 测度 μ 和 λ 满足 $\mu(G_0) = \lambda(\Gamma_0) = 1$,则 $\forall n \in Z$,$\mu(G_n) = \lambda(\Gamma_n)^{-1} := (m_n)^{-1}$,记 $\Delta_j = m_j X_{G_j}$,这里 X_A 表示集合 A 的特征函数.

本文中考虑的空间有 $L^P(\omega)(0 < P \leqslant 1)$,Hardy-Bessel 位势空间 $F_P^\alpha(\omega)(0 < P \leqslant 1, \alpha \geqslant 0)$ 及 Hardy 空间 $H^P(\omega)(0 < P \leqslant 1)$,这些空间均为定义在 G_0 上的函数(或分布)空间. 首先给出它们的定义及基本性质.

定义 1 设 ω 是非负权函数,$L^P(\omega)(0 < P \leqslant 1)$ 是满足下面条件的可测函数 f 的集合:

$$\|f\|_{P、\omega} = \left(\int_{G_0} |f(x)|^P \omega(x) \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/P} < \infty.$$

对分布 f 及 $\alpha \in R$,Littlewood-Paley 型函数 $g_\alpha f$ 为

$$g_\alpha f(x) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} m_j^{2\alpha} |(\Delta_j - \Delta_{j-1}) * f(x)|^2 + |\Phi_0 * f(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}, x \in G_0.$$ 这里 $\Phi_0 = X_{G_0}$.

收稿日期:2000-12-26

作者简介:俞曼,1953—,女,南通师范学院数学系,从事泛函分析的教学与研究.

定义 2　$F_P^\alpha(\omega)(0 < P \leqslant 1, \alpha \geqslant 0)$ 是指满足 $g_\alpha f \in L^P(\omega)$ 的分布 f 的集合. $F_P^\alpha(\omega)$ 中的拟范数定义为 $\|f\|_{F_P^\alpha(\omega)} = \|g_\alpha f\|_{P,\omega}$.

记 $mf(x) = \sup\limits_{j\geqslant 0}|\Delta_j * f(x)|\quad x \in G_0$.

定义 3　$h^P(\omega)(0 < P \leqslant 1)$ 是满足 $mf \in L^P(\omega)$ 的分布 f 的集合. $h^P(\omega)$ 中的拟范数定义为 $\|f\|_{h^P(\omega)} = \|mf\|_{P,\omega}$.

我们也可以用原子的概念来刻划 $h^P(\omega)$. 函数 $a(x)$ 称为一个加权的 P - 型原子,若存在 $x_0 \in G_0$ 及非负整数 n 使得

$\mathrm{supp}\,\alpha \subset x_0 + G_n$, $\|a\|_\infty \leqslant \omega(x_0 + G_n)^{-\frac{1}{P}}$ 及 $\int a(x)\mathrm{d}\mu(x) = 0$ if $n > 0$. $\alpha(x) \equiv 1$ 称为例外原子.

定理 A[1]　设 $0 < P \leqslant 1, \omega \in A_2$,若 $f \in h^P(\omega)$,则 $f = \sum\limits_j \lambda_j a_j$,其中 a_j 是加权 P - 型原子或例外原子,且 $(\sum|\lambda_j|^P)^{1/P} \leqslant C\|f\|_{h^P(\omega)}$. 如果 $a(x)$ 是加权 P - 型原子或例外原子,则 $a(x) \in h^P(\omega)$.

设 $\omega(x)$ 是非负权函数,$d > 0$,若 $\omega(B(x,t)) \geqslant ct^d$, $\forall x \in G_0$, $\forall t \in [0,1]$,则称 $\omega(x) \in \mu_d$.

定理 B　若 $\omega \in A_\infty \cap \mu_d(d > 0)$, $0 < P \leqslant 1$ 及 $\alpha > d(\frac{1}{P} - 1)$,则 $F_P^\alpha(\omega) \subset L^1(\omega) \subset L^P(\omega)$. 其中的包含映射是连续的.

证明　由加权 Triebel-Lizorkin 空间的嵌入定理[4] 知 $F_P^\alpha(\omega) \subset F_1^{\alpha - d(\frac{1}{P}-1)}(\omega)$. 此性质不依赖于 Vilenkin 群的设置. $F_1^{\alpha - d(\frac{1}{P}-1)}(\omega) \subset L^1(\omega)$ 是显然的.

1　$F_P^\alpha(\omega)$ 空间的刻划

定理 1　设 $J^\alpha f(x) = (\hat{G}^\alpha(\nu)\cdot\hat{f}(\nu))^\vee(x)$. 这里 $\hat{G}^\alpha(\nu) = (\max\{1, |\nu|\})^{-\alpha}$,则 $0 < P \leqslant 1$, $\omega \in A_\infty$ 时,$J^{-\alpha}$ 是 $F_P^\alpha(\omega)$ 到 $h^P(\omega)$ 上的同构.

此定理的证明与非加权情况下的证明完全类似,只需借助于[1] 中的加权乘子定理即可.

由 $F_P^\alpha(\omega)$ 的定义,不难得出下面的刻划:

定理 2　设 $0 < P \leqslant 1$, $\omega \in \mu_d(d > 0)$,若 $\alpha > d(\frac{1}{P} - 1)$,则

$$\|f\|_{F_P^\alpha(\omega)} \approx \|(\sum_{j=0}^\infty m_j^{2\alpha}|f - \Delta_j * f|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{P,\omega} + \|f\|_{P,\omega}.$$

证明　设 $f \in F_P^\alpha(\omega)$, $0 < P \leqslant 1$ 及 $\alpha > d(\frac{1}{P} - 1)$,由定理 B,有 $f \in L^1(\omega)$, $f - \Delta_j * f = \sum\limits_{k=1}^\infty(\Delta_{j+k} * f - \Delta_{j+k-1} * f)$ a.e.,因此,由 Minkowski 不等式及定理 B,有

$$\|(\sum_{j=0}^\infty m_j^{2\alpha}|f - \Delta_j * f|^2)^{1/2}\|_{P,\omega} + \|f\|_{P,\omega}$$

$$\leqslant \|\sum_{k=1}^\infty(\sum_{j=0}^\infty m_j^{2\alpha}|\Delta_{j+k} * f - \Delta_{j+k-1} * f|^2)^{1/2}\|_{P,\omega} + \|f\|_{P,\omega}$$

$$\leqslant \|\sum_{k=1}^\infty(\sum_{j=0}^\infty m_{j-k}^{2\alpha}|\Delta_j * f - \Delta_{j-1} * f|^2)^{1/2}\|_{P,\omega} + \|f\|_{P,\omega}$$

$$\leqslant \| \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k\alpha} (\sum_{j=0}^{\infty} m_j^{2\alpha} | \Delta_j * f - \Delta_{j-1} * f |^2)^{1/2} \|_{P,\omega} + \| f \|_{P,\omega}.$$

这里我们用到了 $m_j \geqslant 2m_{j-1} \geqslant \cdots \geqslant 2^k m_{j-k}$,故上式不超过

$$C \| g_\alpha f \|_{P,\omega} + \| f \|_{P,\omega} \leqslant C \| f \|_{F_P^\alpha(\omega)}.$$

另一方面

$$\| f \|_{F_P^\alpha(\omega)}^P = \| (\sum_{j=1}^{\infty} m_j^{2\alpha} | \Delta_j - \Delta_{j-1}) * f |^2 + | \Phi_0 * f |^2)^{1/2} \|_{P,\omega}^P$$

$$\leqslant C \| (\sum_{j=1}^{\infty} m_j^{2\alpha} | f - \Delta_j * f |^2)^{1/2} \|_{P,\omega}^P + C \| (\sum_{j=1}^{\infty} m_j^{2\alpha} | f - \Delta_{j-1} * f |^2)^{1/2} \|_{P,\omega}^P + C \| f \|_{P,\omega}^P$$

$$\leqslant C \| (\sum_{j=1}^{\infty} m_j^{2\alpha} | f - \Delta_j * f |^2)^{1/2} \|_{P,\omega}^P + \| f \|_{P,\omega}^P.$$

为得到下面的刻划,我们给出了一个引理:

引理 设 $0 < P \leqslant 1$,$\omega(x) \in A_2$,则

$$\| f \|_{h^P(\omega)} \approx \| g_0 f \|_{P,\omega} \qquad f \in S'.$$

引理的证明类似于[1] 中的 Th1 及[5] 中的定理的证明,由定理 1 及引理,立即得到

定理 3 设 $\omega \in A_\infty$,$0 < P \leqslant 1$,则

$$\| f \|_{F_P^\alpha(\omega)} \approx \| g_0 (J^{-\alpha} f) \|_{P,\omega}.$$

设 $S_r^\alpha f(x) = (\sum_{j=0}^{\infty} (\int_{G_j \setminus G_{j+1}} | f(x+u) - f(x) |^r \cdot | u |^{-\alpha r - 1} \mathrm{d}u)^{2/r})^{1/2}$.

定理 4 设 $0 < P \leqslant 1$,$\omega \in A_\infty \cap \mu_d (d > 0)$,$\alpha > d(\frac{1}{P} - 1)$,则

$$\| f \|_{F_P^\alpha(\omega)} \leqslant C(\| S_r^\alpha f \|_{P,\omega} + \| f \|_{P,\omega}) \quad 1 \leqslant r \leqslant 2.$$

证明 设 $f \in F_P^\alpha(\omega)$,$f = J^\alpha g$ 且 $g \in h^P(\omega)$

令 $\eta_{k(x)} = \Delta_k(x) - \Delta_{k-1}(x)$,$k \geqslant 1$,则

(1) $J^{-\alpha} \eta_k(x) = \mu(G_k)^{-\alpha} \eta_k(x) = m_k^\alpha \eta_k(x)$;

(2) $\int \eta_k(x) d\mu(x) = 0$;

(3) $\eta_k(x) = \begin{cases} m_k - m_{k-1} & x \in G_k \\ -m_{k-1} & x \in G_{k-1} \setminus G_k \\ 0 & x \notin G_{k-1}. \end{cases}$

由 η_k 的性质得,$k \geqslant 1$ 时

$$\begin{aligned} | \eta_k * g(x) | &= | J^{-\alpha} \eta_k * J^\alpha g(x) | \\ &= m_k^\alpha | \sum_{i=0}^{\infty} \int_{G_i \setminus G_{i+1}} \eta_k(t) (J^\alpha g(x-t) - J^\alpha g(x)) \mathrm{d}t | \\ &\leqslant C m_k^{\alpha+1} \sum_{i=k-1}^{\infty} \int_{G_i \setminus G_{i+1}} | J^\alpha g(x-t) - J^\alpha g(x) | \mathrm{d}t \\ &= C m_k^{1+\alpha} \sum_{i=-1}^{\infty} \int_{G_{i+k} \setminus G_{i+k+1}} | J^\alpha g(x-t) - J^\alpha g(x) | \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

至于 $k = 0$,有

$$|\Delta_0 * g(x)| = \left|\int_{G_0} \Delta_0(t)(J^\alpha g(x-t) - J^\alpha g(x))\mathrm{d}t + J^\alpha g(x)\right|$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{\infty}\int_{G_i \setminus G_{i+1}} |J^\alpha g(x-t) - J^\alpha g(x)|\mathrm{d}t + |J^\alpha g(x)|.$$

因此,由 Minkowski 不等式,有

$$g_0 g(x) = (\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k * g(x)|^2 + |\Delta_0 g(x)|^2)^{1/2}$$

$$\leqslant C(\sum_{k=0}^{\infty} m_k^{2+2\alpha}(\sum_{i=-1}^{\infty}\int_{G_{i+k} \setminus G_{i+k+1}} |J^\alpha g(x-t) - J^\alpha g(x)|\mathrm{d}t)^2)^{1/2} + C|f(x)|$$

$$\leqslant C\sum_{i=-1}^{\infty}(\sum_{k=i}^{\infty} m_{k-i}^{2+2\alpha}(\int_{G_k \setminus G_{k+1}} |J^\alpha g(x-t) - J^\alpha g(x)|\mathrm{d}t)^2)^{1/2} + C|f(x)|$$

$$\leqslant C(\sum_{i=-1}^{\infty} 2^{-i(\alpha+1)}(\sum_{k=i}^{\infty}\int_{G_k \setminus G_{k+1}} |J^\alpha g(x-t) - J^\alpha g(x)||t|^{-\alpha-1}\mathrm{d}t)^2)^{1/2} + C|f(x)|$$

$$\leqslant C(S_1^\alpha f(x) + |f(x)|.$$

所以有

$$\|f\|_{F_P^\alpha(\omega)}^P = \|g\|_{H_\omega^P}^P = \|g_0 g\|_{P,\omega}^P \leqslant C(\|S_1^\alpha f\|_{P,\omega}^P + \|f\|_{P,\omega}^P) \leqslant C(\|S_r^\alpha f\|_{P,\omega}^P + \|f\|_{P,\omega}^P).$$

从而 $\|f\|_{F_P^\alpha(\omega)} \leqslant C(\|S_r^\alpha f\|_{P,\omega} + \|f\|_{P,\omega})$.

[参考文献]

[1] Quek T S. Littlewood-Paley and Multiphier Theorems on Weighted Spaces over Locally Compact Vilenkin Groups[J], J. Math. Anal. Appl. 1997, 210:742—754.

[2] Taibleson M H. Harmonic Analysis on Local Fields[M]. Princeton: Princeton University Press, 1975.

[3] Bui Huy Qui. Weighted Besov and Triebel Spaces: Interpolation by the real method[J]. Hiroshima Math. J., 1982, 12: 581—605.

[4] Triebel H. Interpolation Theory Function Spaces, Differential Operators[M]. Northholland, Amsterdam-New York-Oxford, 1978.

[5] Chao JiaArng. Lusin Area Functions on Local Fields[J]. Pacific J. Math, 1975, 59(2): 383—390.

Weighted Hardy-Besssel Potential Spaces on a Locally Compact Disconneded Group

Yu Man

(Department of Mathematics, Nantong Teachers College, Nantong, 226007, PRC)

Abstract: In this paper, the weighted-Bessel potential spaces on Vilenkin groups is characterized from several aspects.

Key words: Hardy-Bessel potential space; Vilenkin group

[责任编辑:陆炳新]