关于正整数集(a,b,k)型可加划分的一个注解

李为善[1],朱平天[2]

(1.镇江师范专科学校数学系,镇江,212000)
(2.南京师范大学数学与计算机科学学院,南京,210097)

[摘要] 讨论在 a 是偶数,b 与 k 都是奇数,且 $a \geqslant -2k$,$-k \leqslant b < -2k$ 的条件下,$(a,b,k)(k<0)$型可加划分存在的充要条件,以及划分个数的计算公式.

[关键词] (a,b,k)型可加划分;基本图
[中图分类号]O144; [文献标识码]A; [文章编号]1001-4616(2001)03-0021-03

0 引言

正整数集的可加划分问题自从 1978 年由 K.Alladi,P.Erdos 和 V.E.Hoggatt 开始进行研究,最近 20 多年来得到众多数学家的关注,例如著名数学家 R.Evans 于 1981 年发表了论文[2],T.Y.Chow 和 C.D.Long 于 1999 年合作发表了论文[6],I.Dunutruu 于 2000 年发表了论文[7].单墫和朱平天等也发表过一系列的论文,而且在 T.Y.Chow 和 C.D.Long、I.Dunutruu 的论文中引用了单墫和朱平天在文章[4]中的相关成果及方法.

对于给定的正整数 a,b 与整数 k,用下面递归的方法定义一个正整数序列 $U=\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$:

$u_1=a,u_2=b,u_m=u_{m-1}+u_{m-2}+k(m\geqslant 3)$

令 N 是全体正整数所组成的集合,M 是 N 的一个子集.一对集合 M_1 和 M_2 称为 M 的一个划分,如果 $M_1\cup M_2=M$,$M_1\cap M_2=\varnothing$.一个 M 的划分称为(a,b,k)型可加划分,如果 $M_i(i=1,2)$中任意两个不同数的和不属于 U,此时也称 U 是 M 的回避集.

在文[5]中较详细地研究了当 $k<0,a+k\geqslant 0,b+k\geqslant 0$ 时,正整数集 N 的(a,b,k)型可加划分的存在性,给出了划分个数的计算公式,并将这种划分记作$(a,b,k)(k<0)$.本文讨论在条件:

a 是偶数,b 与 k 都是奇数,$a\geqslant -2k$,$-k\leqslant b<-2k$ (1)

下的$(a,b,k)(k<0)$型可加划分,这样使$(a,b,k)(k<0)$型可加划分的结果更加全面完整.本文所用的术语与文[5]相同.

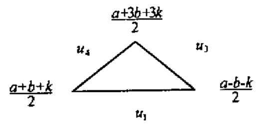
下面分两种情形讨论.

1 当 $b\neq -k$ 时

定理 1 在条件(1)下,若 $b\neq -k$,则$(a,b,k)(k<0)$型可加划分不存在.

证明 此时存在三个不同的数:$\frac{a+3b+3k}{2},\frac{a+b+k}{2},\frac{a-b-k}{2}$,组成一个奇圈:

收稿日期:2001-03-15
作者简介:李为善,1946—,镇江师范专科学校数学系副教授,从事代数的教学与研究.



2　当 $b = -k$ 时

此时 $a \geqslant 2b$，$u_1 = u_3 = u_4 = a$，$u_5 = 2a - b$，$u_6 = 3a - 2b$. 令

$$B = \{n \mid n \in \mathbf{N}, n < a\}$$

并称 B 为一个基础集. 一对集合 B_1 和 B_2 称为 B 的一个基本划分，如果它是 B 的一个划分，而且 $B_i(i = 1,2)$ 中任意两个不同数的和不属于 $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$.

引理 1　当 $m \geqslant 7$，$u_m > u_{m-1} \geqslant 3a - 2b$.

证明　对 m 作归纳法. 当 $m = 7$ 时，

$$u_7 = u_6 + u_5 + k = u_6 + 2(a - b) > u_6 = 3a - 2b$$

一般，当 $m \geqslant 8$ 时，

$$u_m = u_{m-1} + u_{m-2} + k \geqslant u_{m-1} + (3a - 2b) - b > u_{m-1} > 3a - 2b.$$

引理 2　B 的每一个基本划分都是 $(a,b,k)(k<0)$ 型可加划分.

证明　$\forall n_1, n_2 \in B$，有 $n_i < a$. 于是由引理 1 得：$n_1 + n_2 < 2a \leqslant 3a - 2b \leqslant u_m$，对任意 $m \geqslant 6$. 因此 B 的每一个基本划分都是 $(a,b,k)(k<0)$ 型可加划分.

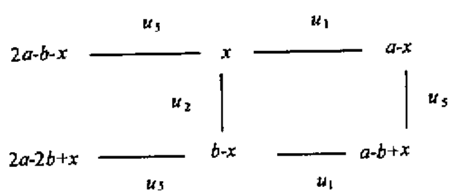
使用类似于文[7]中命题 2.1 的方法可以得到下列引理：

引理 3　B 的每一个 $(a,b,k)(k<0)$ 型可加划分都可以唯一地扩展为正整数集 N 的 $(a,b,k)(k<0)$ 型可加划分.

引理 4　B 的基本划分的个数为 $\dfrac{a-b+1}{2}$.

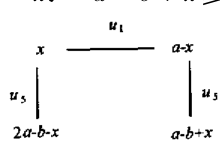
证明　B 的基本图有且只有下列三种类型：

(1) 当 $1 \leqslant x < b$ 时由 $a \geqslant 2b$ 可得：$u_5 - x = 2a - b - x > 2a - 2b \geqslant a$，$u_5 - (b - x) = 2a - 2b + x > a$，$a - x > a - b \geqslant b$，$a - b + x > b$，所以相应的基本图为：



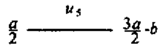
此图中只有 x，$b - x$ 属于 B，且 $x \neq b - x$，所以此种类型的连通分支有 $\dfrac{b-1}{2}$ 个.

(2) 当 $b \leqslant x \leqslant a - b$ 且 $2x \neq a$ 时，由 $a \geqslant 2b$ 可得：$b \leqslant a - x \leqslant a - b$，$u_5 - x = (2a - b) - x \geqslant (2a - b) - (a - b) = a > b$，$u_5 - (a - x) = a - b + x \geqslant a$，所以相应的基本图为：



此图中只有 x,$a-x$ 属于 B,且 $x \neq a-x$,所以此种类型的连通分支有$\frac{a-2b}{2}$个.

(3)当 $x=\frac{a}{2}$时,由 $a \geqslant 2b$ 可得:$\frac{a}{2} \geqslant b$,$\frac{3a}{2}-b \geqslant a$,所以相应的基本图为:



此图中只有$\frac{a}{2}$属于 B,所以此种类型的连通分支有 1 个.

因此,B 的基本划分的个数为:$\frac{b-1}{2}+\frac{a-2b}{2}+1=\frac{a-b+1}{2}$.

注　当 $x>a-b$ 时,$u_1-x<b$,归结到情形(1).

综合以上引理 2,3,4 的结果,我们得到本文的主要定理如下:

定理 2　在条件(1)下,当 $b=-k$ 时,正整数集 **N** 的$(a,b,k)(k<0)$型可加划分存在,且划分个数为$\frac{a-b+1}{2}$.

[参考文献]

[1] Alladi K,Erdos P,Hoggatt E. On additive partitions of integer[J]. Discrete Math.,1978,22:201—211.

[2] Evans R J. On additive partitions of sets of positive integers[J]. Discrete Math.,1981,36:239—245.

[3] Zhu Pingtian. On additive partitions of type(a,b,k) of positive integers[J]. Chinese Science Bulletin,1990,35(6):477.

[4] Shan Zun,Zhu Pingtian. On (a,b,k)-partitions of positive integers[J]. Southeast Asian Bulletin of Math.,1993,1:51—58.

[5] Zhu Pingtian,Chen Meixia. $(a,b,k)(k<0)$-additive partitions of positive integers[J]. Chinese Science Bulletin,1996,41(24):2029—2037.

[6] Chow T Y,Long C D. Additive partitions and continued fractions[J]. Ramanujan Journal,1999,3:55—72.

[7] Dumitriu I. On generalized Tribonacci sequences and additive partitions[J]. Discrete Math.,2000,219:65—83.

A Note for (a,b,k)-Additive Partition of Positive Integers

Li Weishan[1],Zhu Pingtian[2]

(1. Zhengjiang Teacher's Academic School,Zhengjiang,212000,PRC)

(2. School of Mathematics and Computer Science,Nanjing Normal University,Nanjing,210097,PRC)

Abstract:In this paper,we will give a necessary and sufficient condition for existence of the (a,b,k)-additive partition of **N** and the computational formula of the number of the (a,b,k)-additive partitions of **N** when a is even,both b and k are odd and $a \geqslant -2k$,$-k \leqslant b < -2k$.

Key words:(a,b,k)-additive partition;partition graph

[责任编辑:陆炳新]