代数多项式对可微函数的一般保形同时逼近

孙福树,赵洪牛

(1.南京工程学院基础部,南京,210013)
(2.南京邮电学院基础部,南京,210003)

[摘要] 应用带 Hermite 约束条件联立逼近的结果,讨论了有限区间上可微函数借助于代数多项式的一般保形同时逼近,得到相关的几个结果.

[关键词] 可微函数;保形逼近;Hermite 约束条件
[中图分类号]O174; [文献标识码]A; [文章编号]1001-4616(2001)03-0026-04

0 引言

设 $f(x)\in C_{[-1,1]}$ 是逐段单调的函数,即仅在有限个点上改变其函数的单调性.用 $\prod_n$ 表示阶不超过 n 的代数多项式全体.G.L.Iliev[1] 和 D.J.Newman[2] 用共单调的 n 阶代数多项式去逼近逐段单调的函数 $f(x)$,得到逼近度的 Jackson 型估计式:

$$\bar{E}_n(f):=\inf\{\|f(x)-P_n(x)\|\mid P_n(x)\in\prod\nolimits_n,P_n(x)\text{ 在}[-1,1]\text{ 上与 }f(x)\text{ 共单调}\}\leqslant C\omega(f,\frac{1}{n})\tag{1}$$

这里 $\omega(f,t)$ 是 $f(x)$ 的连续模,C 是仅与 $f(x)$ 的单调性改变的次数有关的常数.后来,R.K.Beatson 和 D.Leviatan[3] 考虑了可微函数的共单调逼近,证明了:对 $f(x)\in C^1[-1,1]$,若 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 内 r 次改变单调性,则

$$\bar{E}_n(f)\leqslant Cn^{-1}\omega(f',\frac{1}{n})\tag{2}$$

C 是与 r 有关的数.进一步考虑 $f(x)\in C^k_{[-1,1]}$,k 是任意正整数的情况,余祥明[4] 对共单调逼近和共凸逼近证明了:

定理 A 设 $k\geqslant 2$、r 是任意的正整数,$f(x)\in C^k_{[-1,1]}$,$Y=\{y_i\mid -1<y_1<y_2<\cdots<y_r<1\}$ 是 $[-1,1]$ 中使 $f'(x)=0$ 的点的全体.若对每一固定的 $1\leqslant i\leqslant r$,存在正整数 $2\leqslant j_i\leqslant k$,使得

$$f^{(j)}(y_i)=0,j=1,2,\cdots,j_i-1;f^{(j_i)}(y_i)\neq 0\tag{3}$$

那么,当 n 充分大时成立着

$$\bar{E}_n(f)\leqslant Cn^{-k}\omega(f^{(k)},\frac{1}{n})\tag{4}$$

这里 C 是与 Y 有关的常数.

收稿日期:2001-02-19
作者简介:孙福树,1962—,南京工程学院基础部讲师,主要从事函数论的教学和研究.

定理 B 设 $k \geqslant 3$、S 是任意的正整数,$f(x) \in C^k_{[-1,1]}$,$Z = \{z_i \mid -1 < z_1 < z_2 < \cdots < z_s < 1\}$ 是$[-1,1]$中使 $f'(x) = 0$ 的点的全体,若对每一固定的 $1 \leqslant i \leqslant s$ 存在着正整数 $3 \leqslant j_i \leqslant k$,使得

$$f^{(j)}(z_i) = 0, j = 2,3,\cdots,j_i - 1; f^{(j_i)}(z_i) \neq 0 \tag{5}$$

那么,当 n 充分大时成立着

$$\widetilde{E}_n(f) := \inf\{\|f(x) - P_n(x)\| \mid P_n(x) \in \prod_n, P_n(x) \text{ 在}[-1,1]\text{上与 } f(x) \text{ 共凸}\} \leqslant Cn^{-k}\omega(f^{(k)}, \frac{1}{n}) \tag{6}$$

这里 C 是与 Z 有关的常数.

在本文中,我们用[5]中带 Hermite 约束条件联立逼近的结果来考虑可微函数的一般共形同时逼近,得到如下有关结果.

1 主要定理及证明

定理 1 设 k、l 是任意的正整数,$f(x) \in C^{k+l}_{[-1,1]}$,$f(x)$ 在有限个分段上是分别 k 次保形的,即对 $-1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_m < x_{m+1} = 1$ 有 $\varepsilon_i f^{(k)}(x) > 0, x \in (x_i, x_{i+1}), \varepsilon_i = \pm 1$,$m$ 是一固定的正整数.且对每个 i 存在 j_i,$k + 1 < j_i < k + l$,使得 $f^{(j_i)}(x_i) \neq 0$,那么对充分大的 n 可找到多项式 $P_n(x) \in \prod_n$,也有 $\varepsilon_i P_n^{(k)}(x) > 0, x \in (x_i, x_{i+1})$,使

$$|f^{(j)}(x) - P_n^{(j)}(x)| \leqslant Cn^{-k-l+j}\omega(f^{(k+l)}, \frac{1}{n}), j = 0,1,2,\cdots,k + l \tag{7}$$

这里 C 是与 $Z = \{x_i \mid -1 < x_1 < \cdots < x_m < 1\}$ 有关的常数.

引理[5] 设 k、r 是任意的正整数,$f(x) \in C^k_{[-1,1]}$,$Y = \{y_i \mid -1 < y_1 < \cdots < y_r < 1\}$,那么存在 $Q_n(x) \in \prod_n$,使得

$$Q_n^{(j)}(y_i) = f^{(j)}(y_i) \quad (j = 0,1,\cdots,k; i = 1,2,\cdots,r),$$

并且对充分大的 n 成立着

$$|f^{(j)}(x) - Q_n^{(j)}(x)| \leqslant Cn^{-k+j}\omega(f^{(k)}, \frac{1}{n}), j = 0,1,\cdots k, \tag{8}$$

这里 C 是与 Y 有关的数.

定理 1 的证明 不失一般性,设 $Z = \{x_i \mid -1 < x_1 < \cdots < x_m < 1\}$ 是$[-1,1]$中使 $f^{(k)}(x) = 0$ 的点的全体,对 $\forall x_i \in Z$,由定理的条件有正整数 j_i,$k + 1 \leqslant j_i \leqslant k + l$,使得

$$f^{(j)}(x_i) = 0, j = k,\cdots,j_i - 1; f^{(j_i)}(x_i) \neq 0.$$

不妨设 $\varepsilon'_i f^{(j_i)}(x_i) > 0, \varepsilon'_i = \pm 1$.因为 $f(x) \in C^{k+l}_{[-1,1]}$,所以存在正数 ε 和 δ,使得对 $x \in (x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$,$i = 1,2,\cdots,m$,一致地有

$$\varepsilon'_i f^{(j_i)}(x) \geqslant \delta > 0. \tag{9}$$

由于 $j_i = (k - 1) + (j_i - k + 1)$,从而可知当 $j_i - k + 1$ 是偶数时,x_i 是 $f^{(k-1)}(x)$ 的单调性改变的点,且 $\varepsilon'_i = +1$ 时,$f^{(k-1)}(x)$ 在$(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$内由递减通过 x_i 后改变为递增;$\varepsilon'_i = -1$ 时,$f^{(k-1)}(x)$ 在$(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$内由递增通过 x_i 后改变为递减.当 $j_i - k + 1$ 是奇数时,x_i 不是 $f^{(k-1)}(x)$ 单调性改变的点,若 $\varepsilon'_i = +1$,$f^{(k-1)}(x)$ 在$(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$内递增;若 $\varepsilon'_i = -1$,$f^{(k-1)}(x)$ 在$(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$内递减.由此看到,$j_i - k + 1$ 的奇偶性及 ε'_i 的取值决定了 $f^{(k-1)}(x)$

在$(x_i-\varepsilon, x_i+\varepsilon)$内的单调 性.

由引理,对$f^{(k)}(x)=0$的点集$Z=\{x_i \mid -1<x_1<\cdots<x_m<1\}$,存在$Q_n(x)\in\prod_n$,使得

$$Q_n^{(j)}(x_i)=f^{(j)}(x_i) \qquad (j=0,1,\cdots,k+l;i=1,2,\cdots,m),$$

且当n充分大时成立

$$|f^{(j)}(x)-Q_n^{(j)}(x)|\leqslant Cn^{-k-l+j}\omega\left(f^{(k+l)},\frac{1}{n}\right), j=0,1,\cdots k+l, \tag{10}$$

故有

$$Q_n^{(j)}(x_i)=0, j=k,\cdots,j_i-1;i=1,2,\cdots,m. \tag{11}$$

另一方面因为$j_i\leqslant k+l$,由(10)知$Q_n^{(j_i)}(x)$在$[-1,1]$上一致收敛于$f^{(j_i)}(x)$,所以由(9)式,当n充分大时,对$x\in(x_i-\varepsilon, x_i+\varepsilon)$和$i=1,2,\cdots,m$成立$\varepsilon'_i Q_n^{(j_i)}(x)\geqslant\frac{\delta}{2}>0$.这样结合(11)式,根据上面的叙述,$j_i-k+1$的奇偶性及$\varepsilon'_i$的取值决定了$Q_n^{(k-1)}(x)$在$(x_i-\varepsilon, x_i+\varepsilon)$内的单调性.因此$Q_n^{(k-1)}(x)$与$f^{(k-1)}(x)$在$(x_i-\varepsilon, x_i+\varepsilon)(i=1,2,\cdots,m)$内具有相同的单调性.

记$\rho=\min\left\{|f^{(k)}(x)| \;\middle|\; x\in[-1,1]\setminus\bigcup_{i=1}^{m}(x_i-\varepsilon, x_i+\varepsilon)\right\}$,则$\rho$是仅与$f(x)$有关的正数,由(10)式有

$$|f^{(k)}(x)-Q_n^{(k)}(x)|\leqslant Cn^{-l}\omega\left(f^{(k+l)},\frac{1}{n}\right),$$

于是,当n充分大时,上式右端可小于ρ,这样$Q_n^{(k)}(x)$在$[-1,1]\setminus\bigcup_{i=1}^{m}(x_i-\varepsilon, x_i+\varepsilon)$内与$f^{(k)}(x)$符号相同,也即$Q_n^{(k-1)}(x)$和$f^{(k-1)}(x)$在$[-1,1]\setminus\bigcup_{i=1}^{m}(x_i-\varepsilon, x_i+\varepsilon)$内也具有相同的单调性.从而$Q_n^{(k-1)}(x)$与$f^{(k-1)}(x)$在$[-1,1]$上有相同的单调性.由(10)定理 1 得证.

从定理 1 可得下面的定理 2.

定理 2 设k、l是任意的正整数,$f^{(k+l)}(x)\in C_{[-1,1]}$.若集合$Z=\{x \mid f^{(k)}(x)=\cdots=f^{(k+l)}(x)=0, x\in[-1,1]\}$是空集,那么当$n$充分大时成立着$P_n(x)\in\prod_n$与$f(x)$是$k$次保形的,且有

$$|f^{(j)}(x)-P_n^{(j)}(x)|\leqslant Cn^{-k-l+j}\omega\left(f^{(k+l)},\frac{1}{n}\right), j=0,1,\cdots,k+l, \tag{12}$$

这里C与$f^{(k)}(x)=0$的零点个数有关.

证明 我们只要证$f^{(k)}(x)$的零点个数只有有限个.事实上,若$f^{(k)}(x)$在$[-1,1]$中有无穷多个零点,则由聚点定理,存在$x_0\in[-1,1]$为$f^{(k)}(x)$的零点集合的聚点.由$f^{(k)}(x)$的连续性,$f^{(k)}(x_0)=0$.再由洛尔定理,得出$f^{(k+1)}(x)$也有无穷多个零点,且x_0也是$f^{(k+1)}$的零点集合的聚点,由$f^{(k+1)}(x)$的连续性,$f^{(k+1)}(x_0)=0$.反复运用洛尔定理,可得$f^{(k)}(x_0)=f^{(k+1)}(x_0)=\cdots=f^{(k+l)}(x_0)=0$,即$x_0\in Z$与$Z=\phi$矛盾.

推论 设k、l是任意正整数,$f(x)\in C_{[-1,1]}^{k+l}$,若$f^{(k+l)}(x)>0(<0)$,$x\in[-1,1]$,则当n充分大时存在$P_n(x)\in\prod_n$与$f(x)$是k次保形的,且有

$$|f^{(j)}(x)-P_n^{(j)}(x)|\leqslant Cn^{-k-l+j}\omega\left(f^{(k+l)},\frac{1}{n}\right), j=0,1,\cdots,k+l, \tag{13}$$

这里 C 与 $f^k(x) = 0$ 的零点有关.

[参考文献]

[1] Iliev G L. Exact estimates for partially monotone Approximation[J]. Anal Math,1978,4:181—197.

[2] Newman D J. Efficient Co-monotone Approximation[J] J. Approx Theory,1979,25:189—192.

[3] Beatson R K. On Comonotone Approximation Laviatan D[J]. Canad Math Bull,1983,26:220—224.

[4] 余祥明.论可微函数的共单调逼近和共凸逼近[J].数学研究与评论,1989,9(3):437—441.

[5] Yu Xiangming. Degree of Copositive Polynomial Approximation[J]. Chin Ann of Math,1989,10B(3):409—415.

On General Conformal Simultaneous Approximation of Differentiable Functions by Algebraic Polynomials

Sun Fushu[1],Zhao Hongniu[2]

(1. Nanjing Engineering College,Nanjing,210013,PRC)

(2. Nanjing Institute of Posts and Telecommunications,Nanjing,210003,PRC)

Abstract:In this paper,by using the result about the simultaneous polynomial approximation with Hermite interpolatory side conditions,we discuss general conformal simultaneous approximation of differentiable functions and obtain some results.

Key words:differentiable functions;conformal approximation;Hermite interpolatory side conditions

[责任编辑:陆炳新]

(上接 25 页)

[3] Miyadera I,Kobayasi K. On the asymptotic behavior of almost-orbits of nonlinear contraction semigroups in Banach spaces[J]. Nonlinear Analy.,1982,6:349—365.

关于非扩张半群的弱收敛定理

吉海兵,石建

(南通师范学院数学系,南通,226007)

[摘要] 设 X 是满足 Opial 条件的巴拿赫空间,C 是 X 的一个弱紧致子集,S 是 C 上的一个非扩张半群,本文证明了如果 $X\in C$,并且对于一切 $h\geqslant 0$,$\lim\limits_{t\to\infty}\| T(t+h)x - T(t)x\| =0$,则 $T(t)x$ 弱收敛于某个 $y\in F(S)$(S 的不动点集全体)。

[关键词] 非扩张;半群

[责任编辑:陆炳新]