关于取整函数的一个问题

张新华

(南京邮电学院继续教育学院,南京,210003)

[摘要]　解决了使等式 $[\alpha[\beta n]]=[n\alpha]+[n\beta]$ 对任意 $n\in\mathbf{N}$ 都成立的正数 α,β 的问题.

[关键词]　取整函数;一致分布
[中图分类号]O174;　[文献标识码]A;　[文章编号]1001-4616(2001)03-0030-03

我们容易验证,当 $\beta\in\mathbf{N}$,$\beta\geqslant 2$,$\alpha=\dfrac{\beta}{\beta-1}$ 时,对任意的 $n\in\mathbf{N}$,都有

$$[\alpha[\beta n]]=[n\alpha]+[n\beta] \tag{1}$$

那么,反过来,当正数 α,β 满足什么条件时,(1)式对任意的 $n\in\mathbf{N}$ 都成立呢?

首先,令 $n\to+\infty$,则得 $\alpha\beta=\alpha+\beta$,即 $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=1$,从而必须 $\alpha>1$,$\beta>1$,$\alpha=\dfrac{\beta}{\beta-1}$.

令 $\alpha=r+1$,$\beta=\delta+1$,则 $r>0$,$\delta>0$,且

$$\alpha\beta=(r+1)(\delta+1)=r\delta+r+\delta+1$$

$$\alpha+\beta=r+1+\delta+1.$$

从而得到 $r\delta=1$.

所以

$$\begin{aligned}[\alpha[\beta n]]&=[(r+1)[\beta n]]\\&=[\beta n]+[r[\beta n]]\\&=[\beta n]+[rn+r[\delta n]]\\&=[\beta n]+[r\delta n-r\{\delta n\}+\{rn\}+[rn]]\\&=[rn]+n+[\beta n]+[\{rn\}-r\{\delta n\}]\\&=[\alpha n]+[\beta n]+[\{rn\}-r\{\delta n\}].\end{aligned}$$

从而(1)式等价于 $\{nr\}\geqslant r\{\delta n\}$,即

$$\delta\left\{\frac{n}{\delta}\right\}\geqslant\{\delta n\} \tag{2}$$

取 $n=1$,则 $\{r\}\geqslant r\{\delta\}$,若 $\delta<1$,则 $\{r\}\geqslant r\{\delta\}=r\delta=1$,矛盾,从而 $\delta\geqslant 1$,$r\leqslant 1$.

为了解决问题,我们不加证明地给出一个熟知的引理.

引理 1　当 $1,\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_s$ 在 Q 上线性无关时,$\{n\theta_1\}$,$\{n\theta_2\}$,$\cdots$,$\{n\theta_s\}$ 在 R^s 中一致分布.

引理 2　若 δ 不是二次无理数或有理数时,(1)式不会对任意 $n\in\mathbf{N}$ 都成立.

证明　若 δ 不是二次无理数或有理数,则 $1,\delta,\dfrac{1}{\delta}$ 在 Q 上线性无关,由引理 1,$\{n\delta\}$,$\{n\dfrac{1}{\delta}\}$

收稿日期:2001-01-11
作者简介:张新华,1970—,南京邮电学院继续教育学院讲师,硕士,从事数论的教学与研究.

在 R^2 中一致分布,因而有一串 n,使 $\{n\delta\}\to 1$, $\{n\cdot\frac{1}{\delta}\}\to 0$. 因此(2)不成立,从而(1)也不对任意 $n\in\mathbf{N}$ 都成立.

由引理 2 知,要使(1)对任意 $n\in\mathbf{N}$ 都成立,δ 必为二次无理数或有理数,即 α,β 为二次无理数或有理数.

引理 3 若 β 为有理数,则(1)式对任意 $n\in\mathbf{N}$ 都成立的充要条件是 $\beta\in\mathbf{N}$,$\beta\geqslant 2$ 且 $\alpha=\frac{\beta}{\beta-1}$.

证明 ①若 β 为整数,则由前面的讨论知(1)式对任意 $n\in\mathbf{N}$ 都成立时,必须 $\beta=\delta+1\geqslant 2$,且 $\alpha=\frac{\beta}{\beta-1}$.

另一方面,若 $\beta\geqslant 2$,$\beta\in\mathbf{N}$,$\alpha=\frac{\beta}{\beta-1}$,即 $\alpha\beta=\alpha+\beta$,则对任意 $n\in\mathbf{N}$,有

$$[\alpha[\beta_n]]=[\alpha\beta n]=[(\alpha+\beta)n]=[\alpha n]+\beta n=[\alpha n]+[\beta n].$$

即此时(1)式对任意 $n\in\mathbf{N}$ 都成立.

②若 $\beta=\frac{p}{q}$,$(p,q)=1$,$q>1$,则

$$\alpha=\frac{\beta}{\beta-1}=\frac{p}{p-q}=1+\frac{q}{p-q}.$$

所以,$r=\frac{q}{p-q}$,$\delta=\frac{1}{r}=\frac{p-q}{q}$.

取 $n=p-q$,则

$$\delta\left\{\frac{n}{\delta}\right\}=\delta\left\{n\frac{q}{p-q}\right\}=\delta\{q\}=0.$$

$$\{n\delta\}=\left\{n\frac{p-q}{q}\right\}=\left\{\frac{p^2}{q}\right\}>0.$$

即此时(2)式不成立,从而(1)式也不成立.

引理 4 若 β 为二次无理数,则(1)式对任意 $n\in\mathbf{N}$ 都成立的充要条件是 $\beta-1$ 是方程 $x^2-Bx-A=0$ 的正根,其中 A,B 为自然数,$B\geqslant A-1$,$\alpha=\frac{\beta}{\beta-1}$.

证明 β 是二次无理数,即 δ 是二次无理数,亦即 $r=\frac{1}{\delta}$ 是二次无理数,可设 $Ar^2+Br-C=0$ 或 $Ar^2-Br+C=0$,其中 A,B,C 为整数,$(A,B,C)=1$,$A>0$,$C>0$.

①若 $Ar^2+Br-C=0$.

上式即为 $\frac{A}{\delta}+B=C\delta$,取 $n=mC(m\in\mathbf{N})$.

则 $\delta\left\{\frac{n}{\delta}\right\}=\delta\left\{\frac{mC}{\delta}\right\}=\delta\left\{C\left[\frac{m}{\delta}\right]+C\left\{\frac{m}{\delta}\right\}\right\}=\delta\left\{C\left\{\frac{m}{\delta}\right\}\right\}$.

$$\{\delta n\}=\{mC\delta\}=\left\{mB+\frac{mA}{\delta}\right\}=\left\{\frac{mA}{\delta}\right\}=\left\{A\left\{\frac{m}{\delta}\right\}\right\}.$$

从而(2)成为

$$\delta\left\{C\left\{\frac{m}{\delta}\right\}\right\}\geqslant\left\{A\left\{\frac{m}{\delta}\right\}\right\} \tag{3}$$

若在(3)中取一串 m,使 $C\left\{\frac{m}{\delta}\right\}<1$,$A\left\{\frac{m}{\delta}\right\}<1$. 则 $\delta C\left\{\frac{m}{\delta}\right\}\geqslant A\left\{\frac{m}{\delta}\right\}$,即 $\delta C\geqslant A$,从而

$$B = C\delta - \frac{A}{\delta} \geqslant C\delta - A > 0.$$

若在(3)中取一串 m,使 $\left\{\frac{m}{\delta}\right\} \to \left(1 - \frac{1}{C}\right)^{+}$,则 $\delta\left\{C\left\{\frac{m}{\delta}\right\}\right\} = 0$,

$$\left\{A\left\{\frac{m}{\delta}\right\}\right\} = \left\{A\left(1 - \frac{1}{C}\right)\right\}.$$

要使(3)式成立,必须 $C \mid A$.

另外,取 $n = mA + 1$,则(2)式成为

$$\delta\left\{\frac{mA+1}{\delta}\right\} \geqslant \{\delta(mA+1)\} = \left\{(mA+1)\left(\frac{A}{C\delta} + \frac{B}{C}\right)\right\}.$$

取一串 m,使 $\left\{\frac{mA+1}{\delta}\right\} \to 0$,则 $0 \geqslant \left\{\frac{(mA+1)B}{C}\right\}$. 注意到 $C \mid A$,从而必须 $C \mid B$.

又 $(A, B, C) = 1$,所以 $C = 1$,$\delta = \frac{A}{\delta} + B$. $A > 0$,$B > 0$. 此时

$$\{n\delta\} = \left\{n\frac{A}{\delta} + nB\right\} = \left\{\frac{nA}{\delta}\right\} = \left\{A\left\{\frac{n}{\delta}\right\}\right\} \leqslant A\left\{\frac{n}{\delta}\right\}.$$

当 $\delta \geqslant A > 0$ 时,即 $B \geqslant A - 1$ 时.

$$\{n\delta\} \leqslant A\left\{\frac{n}{\delta}\right\} \leqslant \delta\left\{\frac{n}{\delta}\right\}.$$

即(2)对任意 $n \in \mathbf{N}$ 都成立,从而此时(1)对任意 $n \in \mathbf{N}$ 都成立.

而当 $\delta < A$ 时,取一串 n,使 $\left\{\frac{n}{\delta}\right\} \to \frac{1}{2A}$,则 $\{n\delta\} = \left\{A\left\{\frac{n}{\delta}\right\}\right\} = A\left\{\frac{n}{\delta}\right\} > \delta\left\{\frac{n}{\delta}\right\}$.

即此时(2)式不成立,从而(1)式此时也不成立.

②若 $Ar^2 - Br + C = 0$

上式即为 $C\delta = B - \frac{A}{\delta}$,显然 $B > 0$.

取 $n = mC$,则

$$\{n\delta\} = \{mC\delta\} = \left\{mB - \frac{mA}{\delta}\right\} = 1 - \left\{\frac{mA}{\delta}\right\}. \quad \delta\left\{\frac{n}{\delta}\right\} = \delta\left\{\frac{mC}{\delta}\right\}.$$

取一串 m,使 $\left\{\frac{mC}{\delta}\right\} \to 0$,则 $\{n\delta\} \to 1$,$\delta\left\{\frac{n}{\delta}\right\} \to 0$.

此时(2)式不成立,从而(1)式也不成立.

定理　(1)式对任意 $n \in \mathbf{N}$ 都成立的充要条件是 $\alpha = \frac{\beta}{\beta - 1}$,$\beta$ 是大于 1 的整数或 $\beta - 1$ 是方程 $x^2 - Bx - A = 0$ 的正根. 其中 A,B 为自然数,$B \geqslant A - 1$.

证明　由引理 2,3,4,立即得到.

[参考文献]

[1] Knipers L, Niederreiter H. Uniform distribution of sequences[J]. John Wiley & Sons, Inc. 1974.

[2] 华罗庚. 数论导引[M]. 北京 科学出版社,1995.

(下转 35 页)

（上接 32 页）

On One Problem of Integral Functions

Zhang Xinhua

（Nanjing University of Posts and Telecommunications，Nanjing，210003，PRC）

Abstract：In this paper，we give the terms of $\alpha > 0$ and $\beta > 0$，so that the equation $[\alpha[\beta n]] = [n\alpha] + [n\beta]$ can be established for arbitrary $n \in \mathbf{N}$.

Key words：integral functions；uniform distribution

［责任编辑：陆炳新］