Laplace 变换的数值反演算法的研究

谢咏梅,胡娟,单华宁,王国清

(第二军医大学南京军医学院数理教研室,南京,210099)

[摘要] 利用交错级数的加速方法以及修正的 Bessel-Gauss 求和公式对满足一定条件的函数的 Laplace 变换的数值反演进行讨论,给出了一个条件较为有效的数值计算方法.

[关键词] 反演;加速;Laplace 变换

[中图分类号]O177.6; [文献标识码]A; [文章编号]1001-4616(2001)04-0012-04

0 引言

若函数 $f(t)$ 满足:[1]

(1) 实变量的复值函数 $f(t)$ 和 $f'(t)$ 在 $t \geqslant 0$ 上除掉有第一类间断点(在任一有限区间上至多有有限多个)外连续;

(2) 当 $t < 0$ 时,$f(t) = 0$;

(3) $f(t)$ 是有限阶的,即存在常数 $C_0 \geqslant 0$ 和 $A > 0$ 使得

$$|f(t)| \leqslant A e^{c_0 t} \qquad (t \geqslant 0) \tag{1}$$

则 $f(t)$ 的 Laplace 变换为:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt \tag{2}$$

其中 s 是复数.

假定 $F(s)$ 在复平面 $\mathrm{Re}(s) > c_0$ 上解析,则 $f(t)$ 与 $F(s)$ 有形如

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) e^{st}\,ds \tag{3}$$

的反演公式,其中 $c > c_0$.

Laplace 变换是数学物理中的一种重要的分析工具,在各种自然科学与工程科学部门都有着广泛的应用,Laplace 变换的数值反演也有着同样重要的作用.在一般情况下,Laplace 变换的解是能够比较容易求得的,然而 Laplace 数值反演却是一个众所周知的病态问题.这里,用交错级数的加速方法[3]以及修正的 Bessel-Gauss 求和公式[2]对满足如下条件的函数的 Laplace 变换的数值反演进行讨论,给出了一个较为有效的数值计算方法:

(1) 当 $\omega \geqslant 0$ 时,$\mathrm{Im}\{F(s)\}$ 保号;

(2) $\mathrm{Im}\{F(s)\}$ 及 $(\mathrm{Im}\{F(s)\})^{(k)}(k = 1,2,3,\cdots) \qquad (\omega \to 0)$ (4)

严格单调趋于 0,其中 $s = c + iw$.

收稿日期:2000-12-15

作者简介:谢咏梅,1970—,女,第二军医大学南京军医学院数理教研室助教,主要从事高等数学的教学与研究.

由于

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty} F(s)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s$$

$$= -\frac{2\mathrm{e}^{ct}}{\pi}\int_0^{+\infty} \mathrm{Im}\{F(c+\mathrm{i}w)\}\sin\omega t\,\mathrm{d}w \tag{5}$$

$$= -\frac{2\mathrm{e}^{ct}}{\pi}\left[\frac{\pi}{t}\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}a_k\right]$$

$$= -\frac{2\mathrm{e}^{ct}}{\pi}s(t)$$

其中

$$s(t) = \frac{\pi}{t}\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}a_k \tag{6}$$

$$a_k = \int_0^1 \mathrm{Im}\{F(c+\mathrm{i}\frac{\pi}{t}(x+k-1))\}\sin\pi x\,\mathrm{d}x \tag{7}$$

这就从形式上将式(3)的计算转换成式(5)的计算.

1 修正的 Bessel-Gauss 求和公式

对 $f \in c^{2m+2}[a,b]$，Euler-Maclarin 第一公式为：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = T_{n+1}(f) + c_m(f) + E_{n+1}(f) \tag{8}$$

其中

$$T_{n+1}^{(f)} = h\sum_{i=1}^{n-1}f(a+ih) + \frac{1}{2}[f(a)+f(b)] \tag{9}$$

$$c_m(f) = \frac{\sum_{i=1}^{m}B_{2i}h^{2i}[f^{(2i-1)}(a)-f^{(2i-1)}(b)]}{(2i)!} \tag{10}$$

$$E_{n+1}(f) = \frac{(a-b)B_{2m+2}h^{2m+2}f^{(2m+2)}(\xi)}{(2m+2)!} \tag{11}$$

$\xi \in (a,b)$，$nh = b-a$，B_{2i} 是 Bernoulli 数.

如果用计算差分来代替 $c_m(f)$ 中的微分，则得到 Bessel-Gauss 公式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = T_{n+1}(f) + h(\mu\delta f(a) - \mu\delta f(b))/12 - 11(\mu\delta^3 f(a) - \mu\delta^3 f(b))/720 + 191(\mu\delta^5 f(a) - \mu\delta^5 f(b))/60480 - \cdots + E(f) \tag{12}$$

其中

$$\delta f(x) = f(x+\frac{1}{2}h) - f(x-\frac{1}{2}h)$$

$$\mu f(x) = \frac{1}{2}[f(x+\frac{1}{2}h)+f(x-\frac{1}{2}h)] \tag{13}$$

$$\delta^k f(x) = \delta^{k-1}f(x+\frac{1}{2}h) - \delta^{k-1}f(x-\frac{1}{2}h),\ k = 2,3,\cdots$$

如果用参数 β 定义(13)中的算子：

$$\delta_\beta f(x) = f(x+\frac{1}{2}\beta h) - f(x-\frac{1}{2}\beta h)$$

$$\mu_\beta f(x) = \frac{1}{2}[f(x + \frac{1}{2}\beta h) + f(x - \frac{1}{2}\beta h)] \tag{14}$$

$$\delta_\beta^k f(x) = \delta_\beta^{k-1} f(x + \frac{1}{2}\beta h) - \delta_\beta^{k-1} f(x - \frac{1}{2}\beta h)$$

这就得到了修正的 Bessel-Gauss 公式:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = T_{n+1}(f) + h(\frac{1}{12\beta})(\mu_\beta\delta_\beta f(a) - \mu_\beta\delta_\beta f(b)) - (1 + 10\beta^2)/(720\beta^3)(\mu_\beta\delta_\beta^3 f(a) - \mu_\beta\delta_\beta^3 f(b)) + (168\beta^4 + 21\beta^2 + 2)/(60480\beta^5)(\mu_\beta\delta_\beta^5 f(a) - \mu_\beta\delta_\beta^5 f(b)) - \cdots + E(f) \tag{15}$$

对不同的函数,选择不同的参数 β,可减少计算次数,提高精度.

2　交错级数的加速

设 $s^{(n)}(t)$ 为式(6) 中级数 $s(t)$ 的近似级数序列,在理论上,对 $f(t) = -\frac{2\mathrm{e}^{ct}}{\pi}s(t)$ 可估算到任意的要求精度,然而对确定的 t,级数 $s^{(n)}(t)$ 的收敛速度通常很慢,故采用级数的加速收敛是必要的.

定理 1　若 $F(s)$ 满足式(4) 则

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}a_k = \sum_{k=1}^{N-1}(-1)^{k+1}a_k + (-1)^{N+1}\{a_N/2 - \sum_{k=1}^{m}c_{2k}a_N^{(2k-1)} - \eta c_{2m+2}a_N^{(2m+1)}\} \tag{16}$$

其中 $\eta \in (0,1)$,$c_{2k} = \frac{2^{2k}-1}{(2k)!}B_{2k}$,$B_{2k}$ 为 Bernoulli 数.

证明　因为 $\frac{\pi}{t}(x + k - 1) \geqslant 0, x \in (0,1), k = 1,2,3,\cdots$

所以由已知可知:$a_k = \int_0^1 \mathrm{Im}\{F(c + \mathrm{i}\frac{\pi}{t}(x + k - 1))\}\sin\pi x\mathrm{d}x$ 保号. 又当 $\omega \to \infty$ 时,$\mathrm{Im}\{F(s)\}$ 及 $(\mathrm{Im}\{F(s)\})^{(j)}(j = 1,2,\cdots)$ 严格单调趋于零,其中 $s = c + \mathrm{i}\omega$,所以当 $k \to \infty$ 时,$\mathrm{Im}\{F(c + \mathrm{i}\frac{\pi}{t}(x + k - 1))\}\sin\pi x$,及 $(\mathrm{Im}\{F(c + \mathrm{i}\frac{\pi}{t}(x + k - 1))\})^{(j)}\sin\pi x(j = 1,2,\cdots)$ 严格单调趋于零. 故当 $k \to \infty$ 时,a_k,$a_k^{(j)}(j = 1,2,3,\cdots)$ 严格单调趋于零.

由于 a_k 保号,故 $a_k > 0$ 或 $a_k < 0$.

当 $a_k > 0$ 时,由[3] 中定理 3.1 可知式(16) 成立;

当 $a_k < 0$ 时,$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}a_k = -\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{(k+1)}(-a_k)$.

由[3] 中定理 3.1 可推知式(16) 式成立.

对近似级数 $s^{(n)}(t)$ 应用定理所述方法是加速的[3].

由于 a_k 是普通类型积分,因而可用多种方法计算,如梯形公式,Simpson 公式等,为了提高精度,避免计算量的成倍增加,利用上一节中修正的 Bessel-Gauss 公式(15):

$$\begin{aligned} a_k &= \int_0^1 \mathrm{Im}\{F(c + \mathrm{i}\frac{\pi}{t}(x + k - 1))\}\sin\pi x\mathrm{d}x \\ &\triangleq \int_0^1 g(x,k)\mathrm{d}x \\ &= T_{j+1}(g) + c_l(g) + E_{j+1}(g) \end{aligned} \tag{17}$$

3 数值计算和结果分析

在本节中,将本方法进行数值试验和结果分析,计算结果是在 IBM PC 机上进行的. 考察变换:$F(s) = \frac{1}{s + 1/2}$,$f(t) = e^{-\frac{t}{2}}$,这里 $F(s)$ 符合式(4).

在近似级数 $s^{(n)}(t)$ 中取 $c = 0.1$,$\beta = 0.9$,$n = 10$,$j = 6$,$l = 3$,$m = 2$,表 1 中

$$f_1(t) = -\frac{2e^{ct}}{\pi} s^{(10)}(t),$$

$$R(t) = |f_1(t) - f(t)| / |f(t)|.$$

表 1 数值试验的结果

t	$f(t)$	$f_1(t)$	$R(t)$
2	0.367 879 5	0.367 879 4	8.1×10^{-5}
2.5	0.286 504 8	0.286 505 0	6.2×10^{-7}
3	0.223 130 2	0.223 130 3	6.0×10^{-7}
3.5	0.173 774 0	0.173 774 1	8.5×10^{-7}
4	0.135 355 3	0.135 335 4	8.8×10^{-7}
4.5	0.105 399 2	0.105 399 4	1.4×10^{-6}
5	0.082 085 0	0.082 085 2	2.6×10^{-6}

从表 1 可以看出,本文所述方法对所试验变换是合理的. 虽然目前尚不存在某一种数值反演方法在处理各类问题的反演时都能得到相同的良好效果,但对符合式(4) 的函数,它的 Laplace 数值反演用本文所述方法却是稳定的,并且随着 n、j、l 和 m 的增大,精度越来越高,参数 c,β 的选择不同,精度也随之改变.

[参考文献]

[1] David P J,Rabinwitz P. Methods of Numerical integration[M]. New York,London:Academic Press,1984.

[2] Solak W. On quadrature formulas with end corrections[J]. J Compute Appl Math,1989,25(3):373—377.

[3] Richard Johnsonbaugh. Summing an alternating series[J]. Math month,1979,86:637—648.

Study on the Method for Numerical Inversion of Laplace Transforms

Xie Yongmei,Hu Juan,Shan Huaning,Wang Guoqing

(Nanjing Military Medical College,Second Military Medical University,Nanjing,210099,PRC)

Abstract:Based on discussing the method of accelerating the convergence of alternative series and the summing formule of Modified Bessel-Gauss,the study on the method for numerical inversion of Laplace transforms which satisfied some conditions has been made. A more effective method of numerical computing is presented.

Key words:numerical inversion;Laplace transforms;accelerating

[责任编辑:陆炳新]