关于广义逆的唯一性问题

吴大伟[1],张永康[2]

(1.江南大学师范学院数学系,无锡,214063)
(2.南京师范大学数学与计算机科学学院,南京,210097)

[摘要] 给出了环上矩阵在广义逆存在前提下,各种广义逆唯一的充要条件.

[关键词] 广义逆;半素环;数环;IBN 环
[中图分类号]O151.21 [文献标识码]A; [文章编号]1001-4616(2001)04-0016-04

矩阵广义逆在理论和应用方面的重要性是众所周知的[1].其中在理论上一个有趣的问题就是:广义逆的唯一性问题.文[2]讨论了素环上矩阵有唯一(1,2)-逆的条件,而文[3]则给出了域上矩阵有唯一(1,2)-逆的刻划.本文进一步讨论环上矩阵的其它类型广义逆的唯一性问题,得到了它们的充要条件.

除非特别声明,本文中的环 R 均指带有对合反自同构 σ 的结合环,A 为 R 上 $m\times n$ 阶矩阵,记成 $A\in R^{m\times n}$.当 $A=(a_{ij})$时,规定 $A^*=(\sigma a_{ji})$,如果存在 $n\times m$ 阶矩阵 X 满足:

(1)$AXA=A$,(2)$XAX=X$,(3)$(AX)^*=AX$,(4)$(XA)^*=XA$,四个方程中的第(i),(j),…个方程,则 X 称为 A 的一个($i,j,\cdots$)逆,记成 $A^{(i,j,\cdots)}$.所有($i,j,\cdots$)逆记成 $A\{i,j,\cdots\}$[5].$A^{(1)}$ 也常记成 A^-.易知,对一般环而言,其上矩阵未必有($i,j,\cdots$)逆.

本文中均假定所讨论的矩阵有相应的广义逆.

引理 1[2] 设 A^- 为某一(1)逆,则

(1)$A\{1\}=\{A^-+Y-A^-AYAA^-\mid Y$ 任意$\}$

$=\{A^-+W(I-AA^-)+(I-A^-A)Y\mid Y,W$ 任意$\}$;

(2)$A\{1,2\}=\{A^-AA^-+(I-A^-A)YAA^-+A^-AW(I-AA^-)+(I-A^-A)YAW(I-AA^-)\mid Y,W$ 任意$\}$.

引理 2 设 $A^{(1,3)}$为 A 的某一(1,3)逆,则

(1)$A\{1,3\}=\{A^{(1,3)}+(I-A^{(1,3)}A)Y\mid Y$ 任意$\}$;

(2)$A\{1,2,3\}=\{A^{(1,3)}AA^{(1,3)}+(I-A^{(1,3)}A)YAA^{(1,3)}\mid Y$ 任意$\}$.

证明 (1)设 $Z\in A\{1,3\}$,则

$AZ=(AZ)^*=Z^*(AA^{(1,3)}A)^*=(AZ)^*(AA^{(1,3)})^*=AZAA^{(1,3)}=AA^{(1,3)}$,

于是,$A^{(1,3)}A(Z-A^{(1,3)})=0$,则 $Z-A^{(1,3)}=(I-A^{(1,3)}A)Y$.这里 $Y=Z-A^{(1,3)}$,所以,$Z=A^{(1,3)}+(I-A^{(1,3)}A)Y$.反过来,易证 Z 为 A 的(1,3)逆.

(2)现设 $Z\in A\{1,2,3\}$,由(1)知 $Z=A^{(1,3)}+(I-A^{(1,3)}A)Y$,又因为 $Z=ZAZ$,

收稿日期:2001-07-27
作者简介:吴大伟,1943—,江南大学师范学院数学系副教授,主要从事概率统计与代数学的教学与研究.

$$Z=[A^{(1,3)}+(I-A^{(1,3)}A)Y]A[A^{(1,3)}+(I-A^{(1,3)}A)Y]$$
$$=A^{(1,3)}AA^{(1,3)}+(I-A^{(1,3)}A)YAA^{(1,3)},$$

反过来,若 $Z=A^{(1,3)}AA^{(1,3)}+(I-A^{(1,3)}A)YAA^{(1,3)}$,直接验证易知,$Z\in A\{1,2,3\}$.

对偶地,有如下引理

引理3 设 $A^{(1,4)}$为 A 的某一(1,4)逆,则

(1)$A\{1,4\}=\{A^{(1,4)}+Y(I-AA^{(1,4)})\mid Y\text{任意}\}$;

(2)$A\{1,2,4\}=\{A^{(1,4)}AA^{(1,4)}+A^{(1,4)}AY(I-AA^{(1,4)})\mid Y\text{任意}\}$.

引理4 设 $A^{(1,3,4)}$为 A 的某一(1,3,4)逆,则

$$A\{1,3,4\}=\{A^{(1,3,4)}+(I-A^{(1,3,4)}A)Y(I-AA^{(1,3,4)})\mid Y\text{任意}\}.$$

特别地,$A\{1,3,4\}=\{A^{+}+(I-A^{+}A)Y(I-AA^{+})\mid Y\text{为任意}\}$.

证明 设 $W\in A\{1,3,4\}$,则由引理2,3知,

$$W=A^{(1,3,4)}+(I-A^{(1,3,4)}A)X=A^{(1,3,4)}+Y(I-AA^{(1,3,4)}),$$

故$(I-A^{(1,3,4)}A)X=Y(I-AA^{(1,3,4)})$,两边左乘 $I-A^{(1,3,4)}A$ 得,

$$(I-A^{(1,3,4)}A)X=(I-A^{(1,3,4)}A)^2X=(I-A^{(1,3,4)}A)Y(I-AA^{(1,3,4)}).$$

于是,$W=A^{(1,3,4)}+(I-A^{(1,3,4)}A)Y(I-AA^{(1,3,4)})$.

反过来,由引理2,3知 W 为 A 的(1,3,4)逆.

推论1 设 $A^2=A=A^*$,则

(1)$A\{1,3\}=\{A+(I-A)Y\mid\forall Y\}$, $A\{1,2,3\}=\{A+(I-A)YA\mid\forall Y\}$;

(2)$A\{1,4\}=\{A+Y(I-A)\mid\forall Y\}$, $A\{1,2,4\}=\{A+AY(I-A)\mid\forall Y\}$;

(3)$A\{1,3,4\}=\{A+(I-A)Y(I-A)\mid\forall Y\}$.

下面利用上述引理,讨论各种广义逆的唯一性问题,为此先介绍几种环.

(1)IBN 环(不变维数环) 如果 $A\in R^{m\times n}$,$B\in R^{n\times m}$,满足 $AB=I_m$,$BA=I_n$,那么 $m=n$.易知,左 Noether 环,可换环等都是 IBN 环.

(2)半素环 若 $aRa=0$,则 $a=0$.此也等价于 R 没有非平凡的幂零左理想.易知,若 R 为半素环,则 n 阶矩阵环 $M_n(R)$也是半素环.

若 R 为半素环,且$(1-e)Re=0$,$e^2=e$,则 e 为中心元.

事实上,任取 $x\in R$,$(1-e)xe=0$,即 $xe=exe$,于是 $xet(1-e)=exet(1-e)\in eR(1-e)$,因此 $eR(1-e)$为左理想,且$[eR(1-e)]^2=0$,由 R 为半素环知,$eR(1-e)=0$,即 $ex(1-e)=0$,所以 $ex=exe=xe$,即 e 为中心元.

(3)素环 若 $aRb=0$,则 $a=0$ 或 $b=0$.由[2]知,$M_n(R)$也是素环,易知,无零因子环为素环.

命题1 设 $A\{1\}\neq\emptyset$,则 A 的(1)逆唯一的充要条件为 $AA^-=I_m$,$A^-A=I_n$,这里 $A^-\in A\{1\}$.

证明 设 $A^-\in A\{1\}$,由引理1(1)

$$A^-+(I-A^-A)Y,A^-+W(I-AA^-)\in A\{1\},$$

由 A 的(1)逆唯一性知,

$$A^-+(I-A^-A)Y=A^-=A^-+W(I-AA^-),\forall Y,W.$$

于是 $I=A^-A$,$I=AA^-$.

反过来,当 $AA^-=I$,$A^-A=I$ 时,由引理1知,A 的(1)逆唯一.

推论2 设 R 为 IBN 环,且 $A\{1\}\neq\emptyset$,则 A 的(1)逆唯一的充要条件为 A 为可逆阵.

命题 2　设 $A\{1,2\}\neq\emptyset$,则 A 的(1,2)逆唯一的充要条件为 $AX=eI_m$,$XA=eI_n$,其中 e 为 R 的中心幂等元,$X\in A\{1,2\}$.

证明　设 $X\in A\{1,2\}$,由引理 1(2)

$$X+(I-XA)YAX,X+XAY(I-AX)\in A\{1,2\},$$

由 A 的(1,2)逆的唯一性知,

$$X=X+(I-XA)YAX=X+XAY(I-AX),$$

即 $(I-XA)YAX=XAY(I-AX)$,于是

$$YAX=XAY,\forall Y\in R^{n\times m}.$$

现令 $AX=(b_{ij})_{m\times m}$,$XA=(c_{ke})_{n\times n}$,令 $Y=E_{ij}$ 为 (i,j) 位置上的元为 1,其余为零的 $n\times m$ 阵,则

$$E_{ij}(b_{ij})=(c_{ke})E_{ij},$$

所以 $b_{jk}=0,k\neq j,c_{li}=0,i\neq l$,且 $b_{ij}=c_{ii}$,于是

$$AX=eI,XA=eI.$$

再注意到 $(AX)^2=AX$,所以 $e^2=e$,如果取 $Y=aE_{11},\forall a\in R$,从 $YAX=XAY$ 知,$aE_{11}eI_m=eI_naE_{11}$,所以 $ae=ea$,即 e 为中心元.

反过来,若 $AX=eI_m$,$XA=eI_n$,e 为中心幂等元,则

$$(I-XA)YA=(1-e)YA=Y(1-e)A=Y(I-AX)A=0,$$

$$AW(I-AX)=AW(1-e)=A(1-e)W=A(I-XA)W=0,$$

由此从引理 1 知,A 的(1,2)逆唯一.

推论 3　设 R 为 IBN 的素环,$A\neq 0$,且 $A\{1\}\neq\emptyset$,则 A 的(1,2)逆唯一当且仅当 A 为可逆阵.

事实上,当 e 为中心幂等元时,$eR(1-e)=0$,由 $A\neq 0$,知 $AX\neq 0$,即 $e\neq 0$,再由 R 为素环,$1-e=0$ 即 $e=1$,所以 $AX=I_m$,$XA=I_n$,现由 R 的 IBN 性,A 为可逆阵.

特别地,当 R 为左 Noether 素环、可换整环、体时以上推论成立.

命题 3　(1)若 $A\{1,3\}\neq\emptyset$,则 A 的(1,3)逆唯一$\Leftrightarrow XA=I_n$,对某个 X.

(2)若 $A\{1,4\}\neq\emptyset$,则 A 的(1,4)逆唯一$\Leftrightarrow AX=I_n$,对某个 X.

证明　若 A 的(1,3)逆唯一为 X,则由引理 2,$X+(I-XA)Y$ 也为 $A\{1,3\}$ 中的元,对任意 Y,于是由唯一性知,$XA=I$.

反过来,任取 $Y,Z\in A\{1,3\}$,则

$$AY=(AY)^*=Y^*(AZA)^*=(AY)^*(AZ)^*=AYAZ=AZ,$$

而 $XA=I$,那么

$$Y=(XA)Y=X(AY)=X(AZ)=(XA)Z=Z,$$

所以 A 的(1,3)逆唯一.

同理可证,$A\{1,4\}$ 的情况.

命题 4　设 R 为半素环.

(1)若 $A\{1,2,3\}\neq\emptyset$,则 A 的(1,2,3)逆唯一的充要条件为 $XA=eI$,e 为 R 的中心幂等元,$X\in A\{1,2,3\}$.

(2)若 $A\{1,2,4\}\neq\emptyset$,则 A 的(1,2,4)逆唯一的充要条件为 $AX=eI$,e 为 R 的中心幂等元,$X\in A\{1,2,4\}$.

证明 设 $X\in A\{1,2,3\}$,则由引理2及唯一性知

$$X=X+(I-XA)YAX,(I-XA)YAX=0,\forall Y$$

特别地,取 $Y=KX,\forall K$

$$0=(I-XA)KXAX=(I-XA)KX,$$

于是 $(I-XA)M_n(R)XA=0$,又因为 $M_n(R)$ 为半素环,则 XA 为 $M_n(R)$ 中的中心幂等阵,于是 $XA=eI$.

反过来,由引理2,$A\{1,2,3\}$ 中任意元为

$X+(I-XA)YAX=X+(1-e)YAX=X+YA(1-e)X=X+YA(1-XA)X=X$,于是 A 的 $(1,2,3)$ 逆唯一.

命题5 设 R 为素环,$A\{1,3,4\}\neq\emptyset$,则 A 的 $(1,3,4)$ 逆唯一的充要条件为 $AX=I$ 或 $XA=I$,对某一 X.

证明 记 $X\in A\{1,3,4\}$,则由引理4知,

$$X=X+(I-XA)Y(I-AX),(I-XA)Y(I-AX)=0,$$

当 $n\geqslant m$ 时,由此式推出

$(I-XA)(Y,Z)\begin{pmatrix} I-AX & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0,\forall(Y,Z)\in M_n(R)$,于是由 $M_n(R)$ 的素性知 $ZA=I$ 或 $\begin{pmatrix} I-AX & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0$,即 $I=AX$. 当 $n<m$ 时,同理可证.

反过来,当 $AX=I$ 或 $XA=I$ 时,由命题3立知结论成立.

[参考文献]

[1] Rao C R, Mitra S K. Generalized inverses of matrices and its applications[M]. New York: Wiley, 1971.

[2] Hartwig R E. 1—2 inverses and the invariance of $BA^{+}C$[J]. Linear Algebra and its applications, 1975, 11: 271—275.

[3] 邓恒道. 关于广义逆的注记[J]. 工科数学, 1993, 1: 26—27.

[4] 卢树铭, 郭敏学. 矩阵理论及其应用[M]. 沈阳: 辽宁科技出版社, 1989.

[5] 陈建龙. 关于环上矩阵的广义逆[J]. 数学学报, 1991, (5): 622—630.

About the Uniqueness of Generalized Inverses of Matrices

Wu Dawei[1], Zhang Yongkang[2]

(1. Department of Mathematics, Normal College, Southern Yangtze University, Wuxi, 214063, PRC)

(2. School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing, 210097, PRC)

Abstract: Some necessary and sufficient conditions of uniqueness for different types of generalized inverses of matrices are given on the assumption that the corresponding generalized inverses exist.

Key words: generalized inverses of matrices; semiprime ring; ring of numbers; IBN ring

[责任编辑: 陆炳新]