第 24 卷第 4 期 南京师大学报(自然科学版) Vol.24 No.4
2001 年 JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY(Natural Science) 2001

考虑保证金的期货价格与远期价格的关系

刘国祥[1],蒋新宁[2]

(1.南京师范大学数学与计算机科学学院,南京,210097)
(2.南京广播电视大学,南京,210029)

[摘要] 在保证金为零的情况下,期货价格 F_0 与远期价格 G_0 相等是一个熟知的结果.本文证明,如果保证金非零,则 $(1+\mu)^n F_0 = G_0$,其中 $\mu = K(e^{\delta} - e^{r})$,$n$ 为投资天数,K 为保证金率,δ 为无风险利率,r 为保证金利率.

[关键词] 期货;远期;无套利;价格关系
[中图分类号]F830.9; [文献标识码]A; [文章编号]1001-4616(2001)04-0028-05

0 引言

我们知道,在衍生证券的定价理论中一个基本的假设是:当市场无风险利率为常数、交割期限较短时,期货价格与远期价格相等.并得到了理论证明.但是,该证明还需要一个前提,即交易时不需保证金,从而也就不存在保证金的利息支付问题.而事实上,期货交易都是需要保证金的,而保证金的利息一般不等于市场无风险利率.那么,在这种需要保证金的条件下期货价格与远期价格还相等吗?显然,作为衍生证券的定价理论的基础,我们需要对两者的关系作出更为准确的刻划.本文就此作了进一步的探讨并给出了相应的结果和证明.

1 主要结果

为了叙述我们的结果,引入以下记号:

F_i:i 天末的期货价格,$i=0,1,2,\cdots,n$;

G_0:0 天末的远期价格;

δ:一天的无风险利率,为常数,连续复利;

r:一天的保证金利率,为常数,连续复利;

S_T:合约到期日标的资产的价格;

K:期货合约的保证金率,为常数.

定理 1.1[1] 设市场无套利机会,市场无风险利率为常数,交易手续费为零,期货合约保证金为零,交割期限相同,则期货价格 F_0 和远期价格 G_0 相等,即

$$F_0 = G_0 \tag{1}$$

由定理 1.1 我们便可根据相应的远期价格确定期货价格.由[1],我们知道支付已知红利率证券的远期合约的价格为:

$$G_0 = S e^{n(\delta - q)} \tag{2}$$

收稿日期:2001-04-29
作者简介:刘国祥,1963—,南京师范大学数学与计算机科学学院讲师,东南大学在读硕士研究生,主要从事概率统计、金融数学的教学与研究.

其中 S 为标的证券的现价，q 为红利收益率(日连续复利). 而大部分指数可以看成支付已知红利率的证券，从而由定理 1.1 的(1)式得股票指数期货的价格为：

$$F_0 = S\mathrm{e}^{n(\delta - q)} \tag{3}$$

例 1 考虑一个 $S\&P500$ 指数 90 d 的期货合约. 假设用来计算指数的股票的红利率为每年 3%，指数现值为 400，连续复利的无风险利率为每年 8%. 此时，$\delta = 0.08/365$，$q = 0.03/365$，$n = 90$，则期货价格 F_0 为：$F_0 = 400\mathrm{e}^{0.05\times 90/365} = 404.96$.

但是，由于期货交易的本质特征之一是保证金交易，这也是它和远期合约买卖的最根本区别之一. 因此，在讨论两者价格关系时有必要考虑保证金的因素. 定理 1.1 在这种情形下就不再成立了，实际上，我们有

定理 1.2 设市场无套利机会，市场无风险利率为每天 δ(常数，连续复利)，交易手续费为零，期货合约保证金率为常数 K，保证金收益率为常数 r(连续复利)，交割期限相同为 n 天，则期货价格 F_0 和远期价格 G_0 有下述关系：

$$(1+\mu)^n F_0 = G_0 \tag{4}$$

其中 $\mu = K(\mathrm{e}^{\delta} - \mathrm{e}^{r})$.

从而由式(3)，(4)股票指数期货的价格为：

$$F_0 = S\left[\frac{\mathrm{e}^{\delta - q}}{1 + K(\mathrm{e}^{\delta} - \mathrm{e}^{r})}\right]^n \tag{5}$$

例 2 在例1中，若 $r = 2\%/365$，$K = 5\%$，

$$F_0 = 400\left[\frac{\mathrm{e}^{0.05/365}}{1 + 0.05(\mathrm{e}^{0.08/365} - \mathrm{e}^{0.02/365})}\right]^{90} = 404.66.$$

我们知道，期货合约是在远期合约基础上发展而来的，从根本上增加了合约的变现性和流动性，即买入期货合约后可随时卖出平仓，而远期合约则不可以. 因此，我们认为持有期货合约多头相对于持有远期合约多头具有一定的便利收益*.

定理 1.3 在定理1.2条件下，并设期货合约的多头的便利收益率为 y(日连续复利，常数)，则

$$((1+\mu)^n - \mathrm{e}^{n(y-\delta)})F_0 = G_0 \tag{6}$$

由于定理 1.2、定理 1.3 更贴近实际，我们相信它们不仅将对衍生证券定价理论的研究有所帮助，而且可用以很好地解释一些具体的现象.

推论 1.1 在定理1.3条件下，

(ⅰ)若 $F_0 = G_0$，则 $y = \dfrac{\ln((1+\mu)^n - 1)}{n} + \delta$ (7)

(ⅱ)若 $F_0 \geqslant G_0$，则 $y \geqslant \dfrac{\ln((1+\mu)^n - 1)}{n} + \delta$ (8)

2 主要定理的证明

定理 1.2 的证明 我们参考如下投资策略：一方面，我们不考虑保证金，F_0、G_0 以资金按照[1]中策略，则 0 天末投资 F_0 的期货多头在 n 天末的资产为 $S_T\mathrm{e}^{n\delta}$；0 天末投资 G_0 的远期多

* 持有期货合约相对于远期合约有好处，如因流通性强，在期货价格暴涨时，可先行获利平仓. 这些好处我们称之为期货合约的便利收益(convenience yield)，见[1].

头在 n 天末的资产也为 $S_T e^{n\delta}$.

另一方面,单独考虑期货保证金因素,在 0 天末将

$$K(e^{\delta}-e^{r})(F_0+F_1+F_2+\cdots+F_{n-1})$$

投资于无风险债券,同时把每日所需增加的保证金通过以无风险利率融资来补足.其中 F_i 为 i 日末的期货价格,$i=0,1,2,\cdots,n-1$.具体见表 1.

表 1　期货投资策略

日期	期货价格	期货头寸	必需保证金	需增加保证金	融资终值
0	F_0	e^{δ}	KF_0e^{δ}	KF_0e^{δ}	$KF_0e^{(n+1)\delta}$
1	F_1	$e^{2\delta}$	$KF_1e^{2\delta}$	$K(F_1e^{2\delta}-F_0e^{\delta}e^{r})$	$Ke^{n\delta}(F_1e^{\delta}-F_0e^{r})$
2	F_2	$e^{3\delta}$	$KF_2e^{3\delta}$	$K(F_2e^{3\delta}-F_1e^{2\delta}e^{r})$	$Ke^{n\delta}(F_2e^{\delta}-F_1e^{r})$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n-1$	F_{n-1}	$e^{n\delta}$	$KF_{n-1}e^{n\delta}$	$K(F_{n-1}e^{n\delta}-F_{n-2}e^{(n-1)\delta}e^{r})$	$Ke^{n\delta}(F_{n-1}e^{\delta}-F_{n-2}e^{r})$
n	F_n	0	0	$-KF_{n-1}e^{n\delta}e^{r}$	$-KF_{n-1}e^{n\delta}e^{r}$

所以在 n 天末需还融资总值为

$$KF_0e^{(n+1)\delta}+Ke^{n\delta}(F_1e^{\delta}-F_0e^{\delta})+Ke^{n\delta}(F_2e^{\delta}-F_1e^{r})+\cdots+Ke^{n\delta}(F_{n-1}e^{\delta}-F_{n-2}e^{r})-KF_{n-1}e^{n\delta}e^{r}=Ke^{n\delta}(e^{\delta}-e^{r})(F_0+F_1+F_2+\cdots+F_{n-1}).$$

其值正好等于上述投资在 n 天末的终值:

$$Ke^{n\delta}(e^{\delta}-e^{r})(F_0+F_1+F_2+\cdots+F_{n-1}).$$

终上分析,0 天末期货多头的总投资为

$$F_0+K(e^{\delta}-e^{r})(F_0+F_1+F_2+\cdots+F_{n-1});$$

n 天末的收益为 $S_Te^{n\delta}$.其现值为 S_T,根据无套利假设得:

$$F_0+K(e^{\delta}-e^{r})(F_0+F_1+F_2+\cdots+F_{n-1})=S_T.$$

从而也有

$$F_{n-1}+K(e^{\delta}-e^{r})F_{n-1}=S_T.$$

$$F_{n-2}+K(e^{\delta}-e^{r})(F_{n-2}+F_{n-1})=S_T.$$

…

$$F_1+K(e^{\delta}-e^{r})(F_1+F_2+F_3+\cdots+F_{n-1})=S_T.$$

由此很容易得到:

$$F_{n-1}=\frac{1}{1+K(e^{\delta}-e^{r})}S_T,$$

$$F_{n-2}=\frac{1}{(1+K(e^{\delta}-e^{r}))^2}S_T,$$

…

$$F_0=\frac{1}{(1+K(e^{\delta}-e^{r}))^n}S_T.$$

或

$$(1+K(e^{\delta}-e^{r}))^nF_0=S_T.$$

而远期多头的投资为:G_0,n 天末的收益为 $S_Te^{n\delta}$.于是在无套利机会的情况下有:$G_0=S_T$.

从而

$$(1+K(e^{\delta}-e^{r}))^{n}F_0=G_0.$$

若设 $\mu=K(e^{\delta}-e^{r})$便得(4). 定理 1.2 证毕.

定理 1.3 的证明 由假设在 T 时刻,期货多头的便利收益为 F_0e^{ny},则在 0 时刻的现值为 $F_0e^{n(y-\delta)}$. 从而由定理 1.2 的证明便可得到(6)式. 定理 1.3 证毕.

3 几点注记

(1)若 $K=0$,即期货交易不考虑保证金,则有(1)式 $F_0=G_0$ 成立,此时同定理 1.1;若 $K\neq 0$,但 $r=\delta$,即期货交易收取保证金,但保证金的收益等于市场无风险利率时,则也有(1)式 $F_0=G_0$ 成立. 即定理 1.1 是定理 1.2 的特殊情况.

(2)在定理 1.2 条件下,因为实际上总有 $r<\delta$,所以有 $F_0<G_0$. 从而,若市场有(1)式成立,即 $F_0=G_0$,则可进行套利,投资者通过卖出期货合约而买入远期合约便可获利;但从实证研究的结果(见[1])看,在统计意义下,$F_0\geqslant G_0$,正好与此相反. 对此,我们的解释是,期货合约交易相对于远期合约的交易具有一定的便利收益,前者的交易量远大于后者的事实也说明了这一点. 比如期货合约交易具有良好的变现性(如绝大多数时候可随时平仓了结头寸),而远期合约则不具备这一点. 而且,很显然,非货币标的比货币标的的期货合约的可变现性更具吸引力,即前者的相对便利收益高于后者,这就很容易解释在统计意义下,为什么英镑、加拿大元、德国马克、日元及瑞士法郎的远期和期货价格没有显著的差别,而黄金、白银、铂、铜、胶合板及短期国债的远期和期货价格有显著的差别(5%的置信区间),且期货价格通常高于远期价格.

(3)通过对便利收益的揭示,我们更清楚地看到期货合约作为一种衍生证券工具所具有的无穷魅力. 随着我国社会主义市场经济改革的不断深化、发展,以及即将加入 WTO,我国的期货市场在经过几年来的调整后必将出现一个蓬勃发展的大好时机. 同时,这又反过来要求我们加快对期货证券定价理论的学习和研究,以适应发展的需要,为期货证券市场服务.

(4)为什么定理 1.1 假设期限较短时(1)式就成立呢?事实上,从定理 1.2 我们不难找到答案. 因为 $K(e^{\delta}-e^{r})$很小,由(4)得

$$(1+nK(e^{\delta}-e^{r}))F_0\approx G_0,$$

则 $\dfrac{G_0-F_0}{F_0}\approx nK(e^{\delta}-e^{r})$,

当 n 较小时上式的值很小,可以忽略不计,而有 $F_0\approx G_0$.

例如,取 $n=90$,$K=5\%$,$\delta=\dfrac{8\%}{365}$,$r=\dfrac{4\%}{365}$,则 $\dfrac{G_0-F_0}{F_0}\approx nK(e^{\delta}-e^{r})=0.049\%$.

(5)我们认为,在定理 1.2 条件下,应该可以更进一步地探讨期货期权价格并因此可能得到与以往所不尽相同的结果,以更能贴近实际.

[参考文献]

[1] Hull J. Options, Futures, and other Derivative Securities[M]. Prentice-Hall, NJ., 1993.

[2] 武永清. 现代期货市场[M]. 徐州:中国矿业大学出版社, 1993.

[3] 鲍志强. 证券投资理论与技巧[M]. 南京:河海大学出版社, 1992.

[4] Murphy J J.期货市场技术分析[M](丁圣元译).南京 地震出版社,1994.
[5] Fabozi F J,Modigliani F.(唐旭 等译)资本市场 机构与工具[M].北京 经济科学出版社,1998.
[7] 江其保.Ito 随机积分和定价理论入门(讲义).东南大学应用数学系,1997.

The Price Relation between Futures and Forward Contract in the Case of Non-zero Margin

Liu Guoxiang[1],Jiang Xinning[2]
(1.School of Mathematics and Computer Science,Nanjing Normal University,Nanjing,210097,PRC)
(2.Nanjing TV and Radio University,Nanjing,210029,PRC)

Abstract:It is well-known that the futures price F_0 is equal to the forward price G_0 under the condition of zero margin. We prove in this paper that $(1+\mu)^n F_0 = G_0$ if the margin is non-zero. Here $\mu = K(e^{\delta} - e^{r})$, n is the investment horizon, K is the margin rate, δ is the risk-free interest rate, r is the interest rate of the margin payed by the broker.

Key words:futures;forward contract;no arbitrage;price relation

[责任编辑:陆炳新]

(上接 27 页)

The Local Exponent Sets of Symmetric Primitive Digraphs with Odd Girth 5

Xu Xinping
(Department of Mathematics,Jiangsu Education College,Nanjing,210013,PRC)

Abstract:Let D be a primitive digraph and $u \in V(D)$. The exponent at u of D, denoted by $\exp_D(u)$, is defined to be the least positive integer k such that for any $v \in V(D)$, there is a directed walk of length k from u to v. Let $V(D) = \{1, 2, \cdots, n\}$ so that $\exp_D(1) \leqslant \exp_D(2) \leqslant \cdots \leqslant \exp_D(n)$. $\exp_D(k)$ is called the k th local exponent of D. In this paper, we consider the symmetric primitive digraphs of order n with odd girth 5 and obtain the local exponent sets of them.

Key words:directed graph;primitive;local exponent

[责任编辑:陆炳新]