

# 沙堆分离分层中新现象的计算机模拟

巩龙葵 童培庆

(南京师范大学物理科学与技术学院,南京 210097)

[摘要] 研究了由大小不同的两种粒子形成二维沙堆时的粒子空间分布规律,借助于数学沙粒模型,利用 4 个参数,对 24 种所有可能的情形进行了系统地模拟,得出了粒子空间分布特点,并据此把沙堆分成 7 类:严格分离、整体分离(含分层)、整体分离(含直立)、准周期混合(含分离)、分层、直立分层、直立分层(含混合),并对各类进行分析说明。

[关键词] 二维沙堆;分离;分层;数学沙粒;计算机模拟

[中图分类号] O4—39; [文献标识码] A; [文章编号] 1001-4616(2001)04-0047-06

## 0 引言

由大量较大颗粒物质(如沙粒、大米、玻璃球、粉末等)组成的系统,存在着很多没有解决的问题,需要广泛的研究,其中研究非常活跃的一个课题是沙堆的分离分层现象.当我们震动由不同的粒子组成的系统时,经过足够长的时间,往往发现较大颗粒在表面较多,较小颗粒在下面较多,表现为分离现象.Makse H A 等做的 2 维沙堆实验<sup>[1]</sup>表明当两种粒子满足特定的关系时,会形成分层现象;在 Aguirre M A 等做的玻璃球实验中<sup>[2]</sup>发现在临界层数以上,球堆的最后倾角——休止角基本不变;Makse H A 等对两种粒子形成的沙堆,利用 4 个参数<sup>[3]</sup>,进行了计算机模拟,得到了分层条件,并对这一现象的动力学机制<sup>[4,5]</sup>进行了较详细的研究;Dorogovtsev S N 等对薄的沙流中的粒子分离分层现象进行了理论研究<sup>[6]</sup>,但以上都没有对由两种粒子组成的沙堆进行分类.Head D A<sup>[7]</sup>等人考虑到粒子的表面形状、粗糙程度及组成成分等的所有可能的不同情况,提出用 4 个参数来描述两种粒子的性质及两种粒子间的关系,由于在模拟中粒子的大小是相同的,所以其分类过于简单(4 类:周期混合、分离、竖直分层、分层),对中间过渡类没有研究.本文就是在此模型中考虑到粒子的大小不同,并对此系统中分层、分离等现象进行了详细的研究.

## 1 模型介绍

当一种粒子从空中落到沙堆上时,沙粒有可能沿表面滑动或滚动,直到停在某处为止,也可能停在下落处,这取决于该粒子周围局域倾角的情况,但稳定后沙堆表面不同点的倾角变化往往不大<sup>[2]</sup>,该倾角称之为临界休止角(critical repose angle).当粒子在由多种粒子形成的沙堆

收稿日期 2001-05-29

基金项目 江苏省教育厅高校科研项目(00KJB140004)

作者简介 巩龙葵,1976—,南京师范大学物理科学与技术学院硕士研究生,主要从事较大颗粒物质(granular material)的研究.

表面上运动时,其运动行为取决于该粒子周围局域倾角的大小以及周围粒子的种类,而由多种粒子形成的沙堆,稳定后,不同点的临界休止角不一定相同,取决于沙堆表面局部区域的粒子种类情况.在该模型中,我们考虑了一种简单的情况,只研究两种粒子组成的沙堆,且两种粒子的大小不同,并假定在任意时刻,至多只有一个粒子在运动.在我们所讨论的数学沙粒模型中,所有粒子的宽度都相同,而不同的粒子对应于不同的高度,不失一般性,我们取沙粒的高度和宽度都为整数,两种粒子的宽度都为 1,高度分别为 1 和 2,以下简称 1 粒子和 2 粒子.

我们研究的系统如图 1 所示,横坐标表示空间位置,纵坐标表示粒子的高度,因此系统的状态可用  $h(i)$  来描述.本文考虑半平面的情况,即空间的位置都大于或等于 0 ( $i \geq 0$ ),那么在位置  $i$  处的表面局域倾角为  $s(i) = h(i) - h(i+1)$ .在我们研究的模型中,粒子总是从第 0 个位置上随机加入 1 粒子或 2 粒子,1 次加入 1 个,即  $h(0) \rightarrow h(0) + h_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ , 取决于下落粒子的种类),此时第 0 列表面新加入的粒子为运动的粒子,若  $s(0)$  小于相应的临界休止角  $S_c$ ,则该粒子由运动变为静止,即停在第 0 列表面,否则,该粒子移向下一列,  $h(0) \rightarrow h(0) - h_\alpha$ ,  $h(1) \rightarrow h(1) + h_\alpha$ .按相同的规则,判断该粒子是停在第 1 列,还是移向下一列,直到该粒子静止下来为止.然后再加入新的粒子,重复上面的过程.由于系统中存在着两种粒子,因而临界休止角  $S_c$  取决于不同粒子间的关系.在我们的模型中,存在着 4 个临界休止角:  $S_{11}, S_{12}, S_{21}, S_{22}$ , 其中  $S_{11}$  对应于第 1 种粒子落在第 1 种粒子上面,其余 3 个参数依次类推.

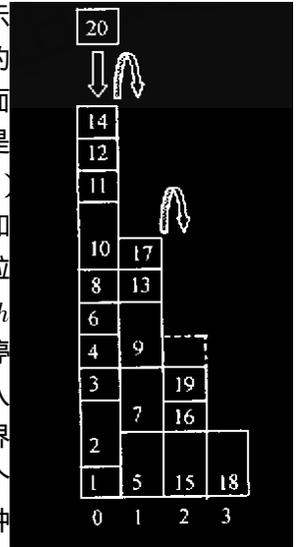


图 1 二维沙堆形成示意图

## 2 模拟结果

本模型的模拟结果只取决于参数间的相对大小关系,而与数值大小无关,因此,不失一般性,我们把 3、5、7、9 四个值按不同的顺序分别赋给  $S_{11}, S_{12}, S_{21}, S_{22}$ , 共有 24 种不同的赋值.为了叙述方便,将  $S_{11}, S_{12}, S_{21}, S_{22}$  的取值用 4 个连续的数字表示,如 3579 表示  $S_{11} = 3, S_{12} = 5, S_{21} = 7, S_{22} = 9$ ,同时将 3、5 称为小参数,7、9 称为大参数.为了避免由于一种粒子太少而影响结果,模拟了大小粒子总数之比约为 1:2 和 1:1 的两种情况.根据模拟结果显示的 1 粒子和 2 粒子的空间分布特点,我们把所有的结果分成 7 种类型.

### 2.1 类型 1: 严格分离

所谓严格分离指的是大小两种粒子有明显的界限,互不进入对方,如图 2,参数组合为 7935、7953、9735、9753、3579、5379、5397 的模拟结果都呈现该类型.其中,在前 4 个参数组合情况下,粒子的空间分布特点为小粒子在上半区、大粒子在下半区;而在后 3 个参数组合情况下,粒子的空间分布特点为小粒子在下半区、大粒子在上半区.在文献 [7] 中,呈现该类型的参数间的关系为  $(S_{12} < S_{22}) \cap (S_{21} > S_{22})$ ,我们的参数组合 3579、5379、5397 包含在该关系中.

不难看出,体现该类型的参数  $(S_{11}, S_{12}, S_{21}, S_{22})$  特点为:小小大大、大大小小,并且呈现这种严格分离的参数组合数占具有这两种参数特点的参数组合总数的  $7/8$  (除 3597 外).在大大小小参数情形下,1 粒子既易停在 1 粒子上,又易停在 2 粒子上,所以运动的距离离墙较近,而 2 粒子既不易停在 1 粒子上,也不易停在 2 粒子上,所以运动的距离离墙较远,这样就形成小粒子在上半区、大粒子在下半区、近处局域角较大、远处局域角较小的严格分离现象,且在两种

粒子的交界处表面出现较大的扭折.而在小小大大参数特点情形下,形成小粒子在下半区、大粒子在上半区、近处局域角较大、远处局域角较小的严格分离现象.

### 2.2 类型 2:直立分层

这种类型的粒子分布特点为:竖直方向上由同种粒子组成,水平方向上两种粒子间隔开来,形成带状分布,如图 3,参数组合为 7359、7539、9357 的模拟结果都呈现该类型.在文献 [7] 中呈现该类型的参数间的关系为  $(S_{12} < S_{22}) \cap (S_{21} < S_{11})$ ,这三种参数组合都包含在该关系中.其参数  $(S_{11}, S_{12}, S_{21}, S_{22})$  特点为:大小大小,呈现该类型的参数组合数占具有这种参数特点的参数组合总数的  $3/4$  (除 9537 外).我们可以这样解释产生直立分层现象的原因:该参数特点将导致“同种粒子相吸,异种粒子相斥”,即同种粒子更易停在同种粒子上,而不易停在异种粒子上,所以一旦有一个基底形成,1 粒子则易停在 1 粒子上,2 粒子则易停在 2 粒子上,这样会形成在竖直方向上由同一种粒子组成,在水平方向上形成分层的沙堆,即直立分层的现象.

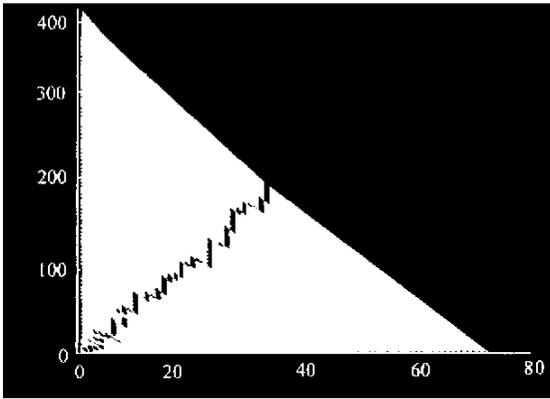


图 2 严格分离

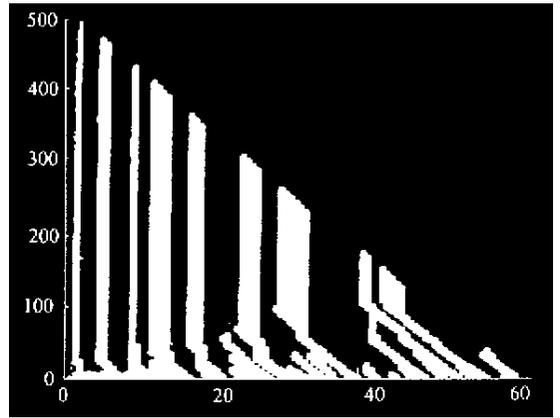


图 3 直立分层

### 2.3 类型 3:直立(含混和)

这种类型的粒子分布特点与直立分层相似,但在竖直方向上两种粒子交替形成混合分布,如图 4,参数组合为 7395、7593、9375 和 5739 的模拟结果都呈现该类型.而在文献 [7] 中,这 4 种参数组合的模拟结果分别属于分离、周期混合、直立分层和直立分层.前三种情形的参数组合  $(S_{11}, S_{12}, S_{21}, S_{22})$  特点为:大小大小,呈现该类型具有该参数特点的参数组合数占具有该参数特点的参数组合总数的  $3/4$  (除 7395 外).在这种参数特点情形下,1 粒子和 2 粒子都易停在 1 粒子上,而不易停在 2 粒子上,这样便有机会形成由 1 粒子构成的直立层,另一方面由于 2 粒子也易停在 1 粒子上,2 粒子也有可能打断这种直立层,形成混合现象,这两方面总的效果会形成直立含混和的沙堆.

### 2.4 类型 4:准周期混合(含分离)

这种类型的粒子分布特点为:除有小部分的分离区域(如图 5)外,粒子混合比较均匀,并且在空间水平方向上呈现准周期性,如图 5 里的小插图(为混合部分的放大).参数组合为 3795、3975、5793、5973 及 3759、3957 的模拟结果都呈现该类型,且单一小粒子在下半区,准周期混合区在上半区.在文献 [7] 中,参数组合为前 4 种时沙堆呈周期混合现象,后两种情形呈分离现象.

前 4 种情形的参数  $(S_{11}, S_{12}, S_{21}, S_{22})$  特点为:小大大小,呈现该类型具有该参数特点的参  
 万方数据

数组组合占具有该参数特点的参数组合总数的全部(4/4)。该参数特点可概括为:同种粒子相斥,异种粒子相吸。在该参数特点情形下,1 粒子易停在 2 粒子上,同时 2 粒子也易停在 1 粒子上,这样给形成混合(竖直方向)提供了可能。另外,由于随机加入大小粒子,粒子会在沙堆表面形成均匀混合的流,由于 1 粒子易停在 2 粒子上,而 2 粒子也易停在 1 粒子上,一旦某一基底形成,便会形成在竖直方向上大小粒子间隔(混合)水平方向呈准周期的沙堆。若在一段时间内,一种粒子数多于另一种粒子数,或总体而言一种粒子多于另一种粒子,则多的粒子会运动到沙堆底部,形成分离。最后形成上半区为准周期混合、下半区为单一粒子区的沙堆。

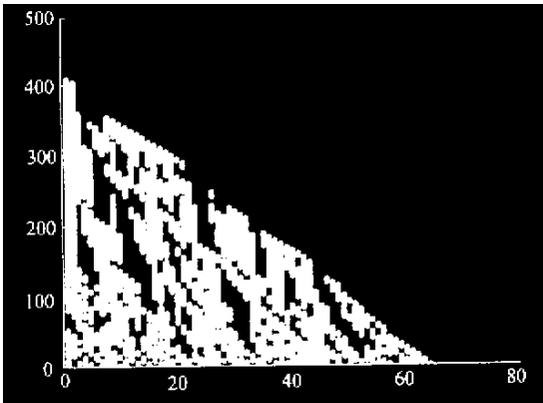


图 4 直立(含混合)

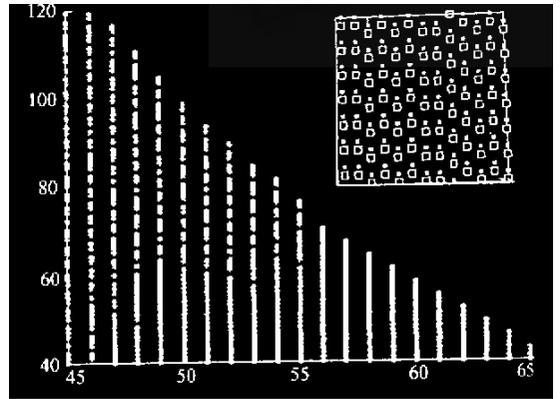


图 5 准周期混合(含分离)

### 2.5 其它类型

类型 5:分层;类型 6:整体分离(含直立);类型 7:整体分离(含分层)。

所谓分层,与直立分层不同,指的是两种粒子在垂直于沙堆表面方向上,间隔开来,形成带状分布,如图 6。对应参数组合为 5937;所谓整体分离(含直立)指的是粒子分布以分离为主,但在一半区域含有直立分层,对应参数组合为 9573,如图 7;而整体分离(含分层)同样指的是粒子分布以分离为主,但在一半区域含有分层,如图 8,对应参数组合为 3597 和 9537。在文献 [7] 中,这 4 种参数组合,分别对应分层、分层、分离、直立分层。

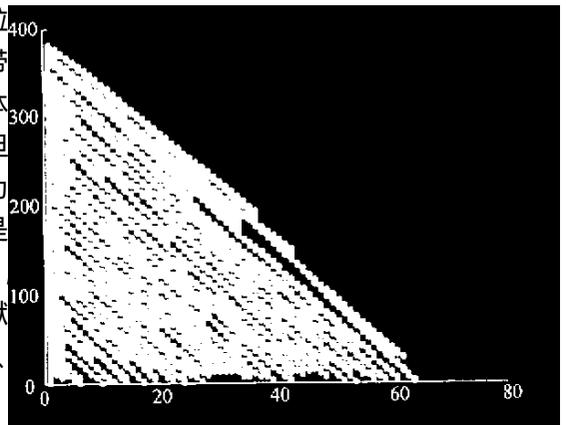


图 6 分层

各种参数组合下对应的参数特点,除 5937 外,其余已经讨论过。由这种复杂的粒子空间分布可得到:特定的参数特点并不一定产生确定的类型,而表现出复杂性,这是由于粒子的大小不同与 4 个临界参数间的大小竞争产生不稳定的结果。同时,体现这三种类型的参数组合数较少(相对于前四种类型而言),即对参数条件的要求比较苛刻。

另外当参数组合( $S_{11}, S_{12}, S_{21}, S_{22}$ )特点为“小大小大”的情形时,1 粒子和 2 粒子都易停在 2 粒子上,都不易停在 1 粒子上。分析方法同类型 3[直立(含混合)],若 1 和 2 粒子大小相同,粒子空间分布特点应与类型 3 相同,但由于 2 粒子较大,粒子大小与 4 个临界参数相竞争,会

产生不稳定.在这种参数特点下,形成的沙堆具有分层[5937]、准周期混和(含分离)[3759, 3957]、直立(含混合)[5739]等多种复杂的空间分布形式.

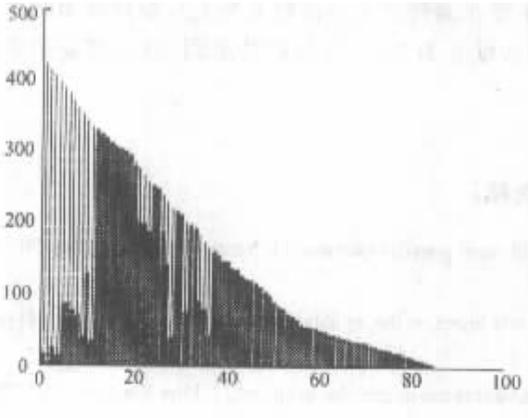


图7 整体分离(含直立)

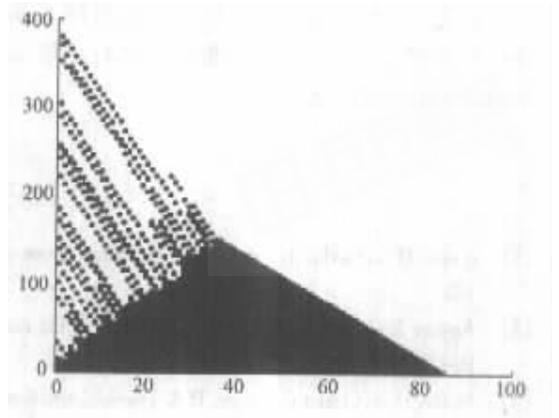


图8 整体分离(含分层)

### 3 参数特点与类型间的关系

根据前面的讨论,我们可以把7种类型总结为如下:

严格分离 [A(7/8)]	}	整体分离(含分层)	——分层
		[ $\alpha$ (1/4)]	[E(1/4)]
		整体分离(含直立)	——准周期直立分层
		[A(1/4), D(1/4)]	[D(3/4)]
		准周期混合(含分离)	——直立(含混合)
		[B(4/4), E(2/4)]	[ $\alpha$ (3/4), E(1/4)]

A、B、C、D、E指参数特点, A指大大小小,小小大大; B指小大大小小; C指大大小小; D指大小大大; E指小大大小小. 括号里面的数字指体现该类型的参数组合数占具有该参数特点的参数组合总数的比例.

根据参数间的大小关系及沙堆类型,我们作相图如图9. 1、2、3、4、5、6、7分别表示上文所说的7种类型.

从相图上可以明显地看出,在离原点较远的区域,在第一象限中,参数特点为B,类型为4;在第二象限中,参数特点为A,类型为1(除3597);

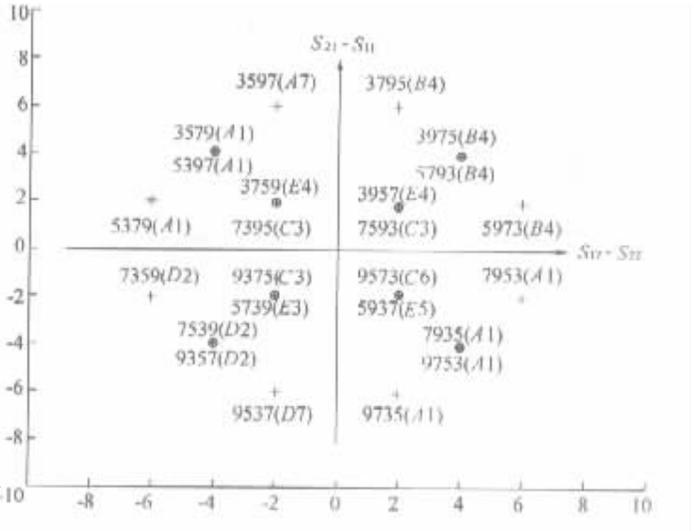


图9 类与参数间的关系

为1(除3597);在第三象限中,参数特点为D,类型为 $\alpha$ (除9537);在第四象限中,参数特点为E,类型为 $\alpha$ (除9753);在第五象限中,参数特点为C,类型为 $\alpha$ (除9753);在第六象限中,参数特点为E,类型为 $\alpha$ (除9753);在第七象限中,参数特点为E,类型为 $\alpha$ (除9753).

A 类型为 1. 在离原点较近的区域, 在四个象限中, 参数特点相同, 都为 C 和 E; 在第一、二象限中, 类型为 3 和 4; 在第三象限中, 类型为 3; 在第四象限中, 类型为 5 和 6.

总之, 大小不同的两种粒子性质可能不同(体现在参数的大小相对关系上)根据模拟结果显示的粒子空间分布特点, 将由两种粒子形成的沙堆分为 7 类, 并分析其成因, 对理解复杂的现象, 具有一定的意义.

### [ 参考文献 ]

- [ 1 ] Makse H A , Havlin S , King P K , *et al.* Spontaneous stratification granular mixture[ J ]. Nature ,1997 ,38( 27 ) :379—382.
- [ 2 ] Aguirre M A , Nerone N , Calvo A. Influence of the number of layers on the equilibrium of a granular packing[ J ]. Phys Rev E ,2000 ,62( 1 ) :738—743.
- [ 3 ] Makse H A , Cizeau P , Stanley H E. Possible stratification mechanism in granular mixture[ J ]. Phys Rev Lett ,1997 ,78( 17 ) :3298—3301.
- [ 4 ] Makse H A , Ball R C , Stanley H E , *et al.* Dynamics of granular stratification[ J ]. Phys Rev E ,1998 ,58( 3 ) :3357—3367.
- [ 5 ] Makse H A. Stratification instability in granular flow[ J ]. Phys Rev E ,1997 ,56( 6 ) :7008—7016.
- [ 6 ] Dorogovtsev S N , Mendes J F F. Evolution of sandpile in a thick-flow regime[ J ]. Phys Rev E ,2000 ,61( 3 ) :2909—2919.
- [ 7 ] Head D A , Rodgers G J. Slow driven sandpile formation with granular mixture[ J ]. Phys Rev E ,1997 ,56( 2 ) :1976—1981.

## Computer Simulation of New Phenomena of Segregation and Stratification in Sandpiles Model

Gong Longyan , Tong Peiqing

( School of Physical Science and Technology , Nanjing Normal University , Nanjing 210097 , PRC )

**Abstract** : The distribution of particles in two dimensional sandpile is studied , which is made of two types of particle in different size , and the result with four parameters in the 24 situations basing on mathematical sand particle model is simulated. The relationship between distributions and parameters is obtained. Seven classes of sandpile : absolute segregation , segregation ( including stratification ) , segregation ( including vertical stratification ) , quasi-periodic mixing ( including segregation ) , stratification , vertical stratification , vertical stratification ( including mixing ) is got. The behavior of each of these classes is explained.

**Key words** : two dimensional sandpile ; segregation ; stratification ; mathematical sand particle ; computer simulation

[ 责任编辑 : 丁蓉 ]