

极端相对论电子对横等离子体波的散射

华正和¹ 李晓卿²

(1. 淮阴师范学院物理系, 淮阴 223001)

(2. 南京师范大学物理科学与技术学院, 南京 210097)

[摘要] 计算了极端相对论电子对横等离子体波的 Compton 散射与非线性散射, 给出了极端相对论电子对横等离子体波的散射概率及散射谱, 该谱与真空中极端相对论电子对单色入射光的逆 Compton 散射谱有着明显的不同, 且出射波极大频率与入射波频率之比也与真空中逆 Compton 散射不相同.

[关键词] 横等离子体波, 逆 Compton 散射, 非线性散射, 散射概率

[中图分类号] O436.2; [文献标识码] A; [文章编号] 1001-4616(2001)04-0060-03

0 引言

散射问题是等离子体中的重要研究课题. Compton 散射和非线性散射正好是由异号的电荷产生的, 大多数情况下它们产生的次级散射波的位相反, 可以相互抵消^[1], 因此, 在一般情况下电子的散射比离子的散射微弱得多. 但极端相对论电子对横等离子体波的散射主要来自 Compton 散射. 在等离子体中, 相对论电子对近单色横等离子体波的散射谱虽然很弥散, 但是是近线性谱, 极大出射频率为入射频率的 $2\gamma^2$ 倍, 而不是 $4\gamma^2$ 倍, 这些特征都与真空中相对论电子对各向同性的单色入射光的逆 Compton 散射谱^[2]有着明显的不同. 在实际观测中可利用出射波极大频率反推极端相对论电子的 γ 值.

1 分析与计算

等离子体中电子对入射波的散射主要有两种机制, 一是电子本身对入射波的散射, 即 Compton 散射; 二是电子周围极化云对入射波的非线性散射. 总散射概率为^[3]:

$$W^{tt'} = \frac{4(2\pi)^3 e^4 |G_{\sigma\sigma'}|^2 \delta[\omega - \omega' - (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{v}]}{m^2 \frac{\partial}{\partial \Omega}(\Omega^2 \epsilon^t) \big|_{\Omega=\omega} \frac{\partial}{\partial \Omega}(\Omega^2 \epsilon^t) \big|_{\Omega=\omega'}},$$

其中 ω' 为入射波频率, \mathbf{k}' 为入射波波矢, $\epsilon(\mathbf{k}')$ 为入射波对应的等离子体介电常数 (ω 、 \mathbf{k} 、 $\epsilon(\mathbf{k})$) 为出射波对应的参量, \mathbf{v} 为电子运动速度, $G_{\sigma\sigma'} = e_i^*(\mathbf{k}) e_j(\mathbf{k}') G_{ij}$, \mathbf{e} 为波电场的单位矢, G_{ij} 为散射张量.

1.1 Compton 散射

Compton 散射对应的散射矩阵元为^[3]:

$$G_{ij}^{\text{Comp}} = g_{ik} \left(\delta_{kl} - \frac{v_l v_k}{c^2} \right) g'_{jl} / (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2$$

$$= \frac{1}{\gamma} \left[\delta_{ij} + \frac{k_j v_i}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} + \frac{k'_j v_i}{\omega' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}} + \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' - \frac{\omega \omega'}{c^2}) v_i v_j}{(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})(\omega' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v})} \right],$$

其中 $g_{ij} = (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \delta_{ij} + k_j v_i$, $g'_{ij} = (\omega' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}) \delta_{ij} + k'_j v_i$, γ 为洛伦兹因子, c 为光速.

取入射横等离子体波频率 $\omega' = \omega_{pe} + \frac{k'^2 c^2}{2\omega_{pe}} \approx \omega_{pe} (kc \ll \omega_{pe})$, 考虑到 $\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c^2$, $\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = \omega' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}$, 取球坐标 $\mathbf{v} = (v, \theta, \phi)$, $\mathbf{k} = (k, \theta, \phi)$, $\mathbf{k}' = (k', \theta', \phi')$, 得:

$$G_{ij}^{\text{Comp}} = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\beta \sin 2\theta}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} & 0 & \frac{1}{\gamma^2} \sqrt{1 + \left(\frac{2\beta \cos \theta}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta} \right)^2} \end{pmatrix},$$

其中 $\beta = \frac{v}{c}$. 考虑到波有两种偏振态, 得:

$$|G_{\sigma\sigma'}^{\text{Comp}}|^2 = \frac{1}{2} (\delta_{il} - k_i k_l) (\delta_{jm} - k'_j k'_m) G_{ij} G_{lm},$$

此处的波矢为单位波矢, 例如 $k_1 = \sin \theta$, $k'_1 = \sin \theta' \cos \phi'$. 不难验证, 对任意 (θ, θ', ϕ') 均有

$$|G_{\sigma\sigma'}^{\text{Comp}}|^2 \approx \frac{1}{2\gamma^2}.$$

1.2 非线性散射

为了求出非线性散射矩阵元, 先求运动电子的感生场 $E^e(\mathbf{k}_2)$ 和矩阵元 $S_{ijl}^{[3]}$.

$$E^e(\mathbf{k}_2) = \frac{4\pi e}{(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{v})^2} e^{-\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_0} \delta(\omega_2 - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{v}),$$

$$S_{ijl} = \Sigma - e^3 \int \frac{v_i}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} \left[\frac{\partial}{\partial p_j} \left(\frac{1}{\omega_2 - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{v}} \frac{\partial f}{\partial p_l} \right) + \frac{\partial}{\partial p_l} \left(\frac{1}{\omega' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}} \frac{\partial f}{\partial p_j} \right) \right] \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}$$

$$= -\frac{e}{4\pi m\omega} \{ \delta_{ij} k_2 [1 - \epsilon^l(\mathbf{k}_2)] + \delta_{il} k'_j [1 - \epsilon^l(\mathbf{k}')] \},$$

其中 \mathbf{k}_2 为感生场波矢, ω_2 为感生场频率, \mathbf{k}' 为入射场波矢, ω' 为入射场频率, ϵ^l 为纵介电常数, ϵ_e^l 为略去电子贡献的纵介电常数, ϵ_i^l 为略去离子贡献的纵介电常数, 三者满足 $\epsilon^l = \epsilon_e^l + \epsilon_i^l - 1$. 计算过程中已考虑到 $\omega \gg kp/m$, $\omega' \gg k'p/m$, 并且略去了基础离子分布对 S_{ijl} 的贡献, 同时考虑到入射波为横波, 即 $k_i E_i = 0$, 最后得非线性散射矩阵元:

$$G_{ij}^{\text{non}} = -\frac{\omega_{pe}}{\omega} \delta_{ij} \left[1 - \frac{\epsilon^l(\mathbf{k} - \mathbf{k}')}{\epsilon^l(\mathbf{k} - \mathbf{k}')} \right],$$

同样可得

$$|G_{\sigma\sigma'}^{\text{non}}|^2 = \frac{\omega'^2}{\omega^2} \left| 1 - \frac{\epsilon^l(\mathbf{k} - \mathbf{k}')}{\epsilon^l(\mathbf{k} - \mathbf{k}')} \right|^2 \left[1 + \left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'}{kk'} \right)^2 \right] \sim \frac{\omega_{pe}^6}{\omega^6}.$$

1.3 散射概率

我们仅对出射的高频横波(电磁波)感兴趣, 由 δ 函数宗量等于零可得 $\omega \sim \gamma^2 \omega_{pe}$, 因此 Compton 散射比非线性散射重要得多, 由此得极端相对论电子对横等离子体波的总散射概率:

$$W = \frac{(2\pi)^3 e^4}{m^2 \omega \omega_{pe}} \left| G_{\sigma\sigma'}^{\text{Comp}} \right|^2 \delta(\omega - \omega_{pe} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \approx \frac{(2\pi)^3 e^4}{2\gamma^2 m^2 \omega \omega_{pe}} \delta(\omega - \omega_{pe} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}).$$

1.4 散射功率及散射功率谱

可认为入射横等离子体波为各向同性, 谱激元数取 $N_{\mathbf{k}'} = N(k')$, 则单电子散射波的总功

率为:

$$P = \int \hbar \omega W N_{k'} \frac{dk dk'}{(2\pi)^3} \approx \frac{\hbar e^4 \int N(k') k'^2 dk'}{2\pi \gamma^2 m^2 \omega_{pe} v} \int_0^{k_{\max}} k dk,$$

其中 $k_{\max} = 2\gamma^2 \omega_{pe} v / c^2$. 因为散射概率 W 与入射波矢大小无关, 我们也可进行更精确的数值计算,

$$\begin{aligned} P &= \frac{\hbar e^4 \int N(k') k'^2 dk'}{(2\pi)^3 \gamma^2 m^2 \omega_{pe} v} \int f(\theta) \delta(\omega - \omega_{pe} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) k^2 dk d\cos\theta \\ &= \frac{\hbar e^4 k_{\max}^2 \int N(k') k'^2 dk'}{(2\pi)^3 \gamma^2 m^2 \omega_{pe} v} \int_0^1 p(x) dx, \end{aligned}$$

其中 $f(\theta) = \int 2\gamma^2 |G_{\sigma\sigma'}^{\text{Comp}}|^2 \sin\theta' d\theta' d\varphi'$; $x = \frac{k}{k_{\max}}$; $p(x) = x f(\theta)|_{\theta=\theta(x)}$, 关系式 $\theta = \theta(x)$ 由 δ 函数宗量等于 0 确定, $p(x)$ 即为散射功率谱. $f(\theta)$ 及 $p(x)$ 的曲线如图 1 所示, 计算中取 $v = 0.9999c$.

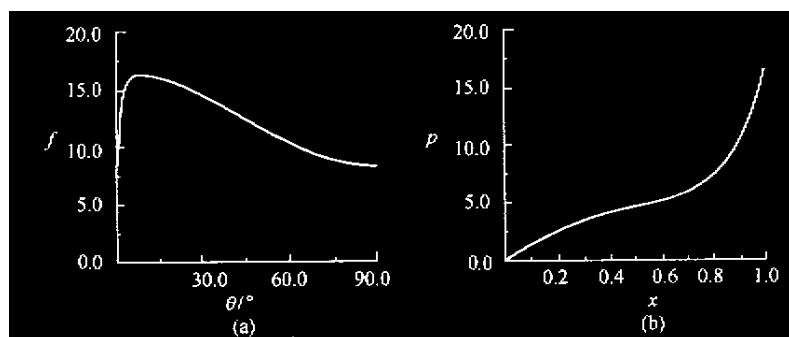


图 1 函数 $f(\theta)$ 和功率谱 $p(x)$ 曲线图

2 结果讨论

宇宙中充满等离子体介质, 电子对波的散射也应作相应的考虑. 若极端相对论电子散射的为各向同性单色光 ($\omega' = k'c$), 则由 δ 函数宗量等于零易得, 出射波极大频率为入射波频率的 $4\gamma^2$ 倍, 且不难想象, 出射谱是非线性的弥散谱, 这些特征都与真空中极端相对论电子的逆 Compton 散射类似.

本文考虑的是一种特殊的情形, 入射波是横等离子体波 $\omega' \approx \omega_{pe}$. 若等离子体 ω_{pe} 较大, 电子的 γ 值也较大, 且等离子体温度较低 (即等离子体本身不辐射光波, 但其内可激发横等离子体波), 就应该有近线性谱的光出射; 反之, 若观测到这种谱线, 则可推出极端相对论电子的 γ 值. 虽说这是一种特殊的情形, 却有着极大的实际意义.

[参考文献]

- [1] Vadim N Tsytovich. Nonlinear Effects in Plasma[M]. New York—London: Plenum Press, 1970. 226—227.
- [2] 杨丕博. 天体辐射理论引论[M]. 武汉: 华中师范大学出版社, 1996. 186—187.
- [3] 李晓卿. 湍动等离子体物理[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 1987. 117—125.

(下转 67 页)

(上接 62 页)

Scattering of Transverse Plasma Wave by the Ultra-relativistic Electron

Hua Zhenghe¹ ,Li Xiaoqing²

(1. Physics Department of Huaiyin Teachers College ,Huaiyin 223001 ,PRC)

(2. School of Physical Science and Technology ,Nanjing Normal University ,Nanjing 210097 ,PRC)

Abstract :Not only the scattering probability of transverse plasma wave by the ultra-relativistic electron is given through calculation of Compton and nonlinear scattering ,but also the scattering spectrum(approximate linear one) ,the ratio($2\gamma^2$) of the subsequent wave frequency to the incident one are obtained. The spectrum is different from that one of the inverse-Compton scattering of the unicolor ray by the ultra-relativistic electron in vacuum.

Key words :transverse plasma wave ;inverse-Compton scattering ;nonlinear scattering ;scattering probability

[责任编辑 :丁蓉]

万方数据