具变系数的 Ginzburg-Landau 泛函的径向极小元

雷雨田

(南京师范大学数学与计算机科学学院,210097,南京)

[摘要]　作者研究了具变系数的 Ginzburg-Landau 模型,给出了这一 Ginzburg-Landau 泛函的径向极小元的零点分布,并证明了它的 H^1 局部强收敛性以及惟一性.

[关键词]　具变系数的 Ginzburg-Landau 泛函,径向极小元,零点分布

[中图分类号]O175.2,　[文献标识码]A,　[文章编号]1001-4616(2004)01-0001-06

0　引言

记 $B_R = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2;(x_1 - 1)^2 + x_2^2 < R,(R < 1)\}$,$a = (1,0)$.设泛函

$$E_\varepsilon(u, B_R) = \frac{1}{2}\int_{B_R} \frac{1}{x_1}[|\nabla u|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2}(1 - |u|^2)^2]$$

在容许函数类 $W = \{u(x) = f(r)\frac{x-a}{|x-a|} \in H^1(B_R, R^2);f(r) \geqslant 0, f(R) = 1, r = |x-a|\}$ 中的极小元为 u_ε,我们称之为泛函 $E_\varepsilon(u, B_R)$ 的径向极小元.

泛函 $E_\varepsilon(u, B_R)$ 是从一类简化的 Ginzburg-Landau 模型中抽象出来的,它曾用来描述超导薄膜的厚度是非定常的情形[1].泛函在容许函数类 $V = \{u(x) \in H^1(B_R, R^2);u|_{\partial B_R} = \frac{x-a}{R}\}$ 中的极小元为序参数,其零点代表 Ginzburg-Landau 涡漩[2].刻划极小元的极限行为,则是文[2]中提出的问题(open problem 4).1997 年,文[3]研究了这一问题,给出了极小元的渐近行为及涡漩的钉扎现象(即当参数 $\varepsilon \to 0$ 时,涡漩向某些区域集中的现象).一个自然的问题是:泛函 $E_\varepsilon(u, B_R)$ 在 V 上的极小值可否于 W 中达到?本文,我们将讨论径向极小元 u_ε 的零点分布,并以此说明当 ε 充分小时,径向极小元必不是泛函 $E_\varepsilon(u, B_R)$ 在 V 中的普通极小元.具体地说,我们将证明下面的定理:

定理 0.1　设 u_ε 是泛函 $E_\varepsilon(u, B_R)$ 的径向极小元.则对任何给定的 $\eta \in (0, 1/2)$,存在正常数 $h = h(\eta)$ 使得当 ε 充分小时,$Z_\varepsilon = \{x \in B_R;|u_\varepsilon(x)| < 1 - \eta\} \subset B(a, h\varepsilon)$.

这蕴含 $u_\varepsilon(x)$ 的零点均含在 $B(a, h\varepsilon)$ 中.

关于径向极小元的极限行为,我们有

定理 0.2　设 u_ε 是泛函 $E_\varepsilon(u, B_R)$ 的径向极小元.则当 $\varepsilon \to 0$ 时,$u_\varepsilon \to \frac{x-a}{|x-a|}$,于 $H^1_{loc}(\overline{B_R} \setminus \{a\})$.

此外,我们还得到径向极小元的惟一性,即

定理 0.3　当 ε 适当小时,径向极小元于 W 中是惟一的.

在§1 中我们将证明定理 0.1,这一定理事实上刻划了径向极小元的零点(即涡漩)的钉扎机制.定理 0.2 和定理 0.3 的证明将分别在§2 和§3 中给出.

1　定理 0.1 的证明

引理 1.1　设 u_ε 是泛函 $E_\varepsilon(u, B_R)$ 的径向极小元.则 $u_\varepsilon(x)$ 是

收稿日期:2003-10-11.
基金项目:数学天元基金(A0324628).
作者简介:雷雨田,1971-,南京师范大学数学与计算机科学学院副教授,从事偏微分方程的教学与研究,E-mail:lythxl@163.com

$$-\Delta u+\frac{1}{x_1}u_{x_1}=\frac{1}{\varepsilon^2}u(1-|u|^2),\tag{1}$$

的径向解.此外,u_ε 还满足

$$|u_\varepsilon|\leqslant 1,\ \text{in } B_R,$$
$$|\nabla u_\varepsilon|\leqslant C_1\varepsilon^{-1},\ \text{in } B_R,\tag{2}$$

这里 C_1 是不依赖于 ε 的正常数.

证明　由变分法,我们可知 对任何 $\phi(x)=\varphi(r)\frac{x-a}{|x-a|}\in H_0^1(B_R,R^2)$,径向极小元满足如下的积分等式

$$\int_{B_R}\frac{1}{x_1}\left[\nabla u\nabla\phi-\frac{1}{\varepsilon^2}(1-|u|^2)u\phi\right]\mathrm{d}x=0.$$

由此容易看出 u_ε 是(1) 的径向解.

在上面的积分等式中取 $\phi=u(|u|^2-1)_+$ 得

$$\int_{B_R}\frac{1}{x_1}\left[|\nabla u|^2(|u|^2-1)_++2(u\nabla u)^2+\frac{1}{\varepsilon^2}(|u|^2-1)_+^{\ 2}|u|^2\right]\mathrm{d}x=0.$$

这里$(|u|^2-1)_+=\max\{|u|^2-1,0\}$.注意到等式左端非负,我们知第三项积分为零.由此不难看出$|u_\varepsilon|\leqslant 1$.

考察[4] 中引理 A.2 的证明,并利用 $|u_\varepsilon|\leqslant 1$,可知方程(1) 的径向解也满足(2).

引理 1.2　设 u_ε 是泛函$E_\varepsilon(u,B_R)$ 的径向极小元.则存在与 ε 无关的正常数C,使 $E_\varepsilon(u_\varepsilon,B_R)\leqslant C+C|\ln\varepsilon|$.

证明　作相似变换 $y=(x-a)\varepsilon^{-1}$.则

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon,B_R)\leqslant\frac{1}{2(1-R)}\int_{B(0,R\varepsilon^{-1})}|\nabla u_\varepsilon|^2\mathrm{d}y+\frac{1}{4(1-R)}\int_{B(0,R\varepsilon^{-1})}(1-|u_\varepsilon|^2)^2\mathrm{d}y.$$

设 u_1 是泛函

$$F(u,B(0,R))=\frac{1}{2(1-R)}\int_{B(0,R)}|\nabla u|^2\mathrm{d}y+\frac{1}{4(1-R)}\int_{B(0,R)}(1-|u|^2)^2\mathrm{d}y$$

在 $\{u(y)=f(r)\frac{y}{|y|}\in H^1(B(0,R),R^2);f(r)\geqslant 0,f(R)=1,r=|y|\}$ 中的径向极小元.令

$$u_2=u_1,\text{if } 0<|y|<R;$$
$$u_2=\frac{y}{|y|},\text{if } R\leqslant|y|\leqslant R\varepsilon^{-1}.$$

将 u_2 作为比较函数,我们可得

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon,B_R)\leqslant\frac{1}{2(1-R)}\int_{B(0,r\varepsilon^{-1})\setminus B(0,r)}\left|\nabla\frac{y}{|y|}\right|^2\mathrm{d}y+F(u_1,B(0,R))\leqslant C+C|\ln\varepsilon|.$$

引理得证.

类似于[5] 中定理 1 的证明,利用引理 1.2,我们也可得到如下结论.

引理1.3　设 u_ε 是泛函$E_\varepsilon(u,B_R)$ 的径向极小元.则存在正常数 C 和适当小的ε_0,使当 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$ 时,$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{B_R}(1-|u_\varepsilon|^2)^2\leqslant C$.

命题1.4　设 u_ε 是泛函$E_\varepsilon(u,B_R)$ 的径向极小元.则对任何给定的 $\eta\in(0,1/2)$,存在不依赖于 ε 的正常数 λ,μ,使得如果

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{B_R\cap B^{2l\varepsilon}}(1-|u_\varepsilon|^2)^2\leqslant\mu,\tag{3}$$

其中 B^r 记任一以 r 为半径的圆盘,$l\geqslant\lambda$.则

$$|u_\varepsilon(x)| \geqslant 1-\eta, \forall x \in B_R \cap B^{l\varepsilon}.$$

证明 首先,我们知存在一个不依赖于 ε 的常数 $C_2>0$,使得对任何 $x \in B_R$,总有 $|B_R \cap B(x,r)| \geqslant C_2 r^2$.取定

$$\lambda = \frac{\eta}{2C_1}, \mu = \frac{C_2}{C_1^2}\left(\frac{\eta}{2}\right)^4, \tag{4}$$

其中 C_1 是(2)中的常数.假设在 $B_R \cap B^{l\varepsilon}$ 中存在一点 x_0 使得 $|u_\varepsilon(x_0)|<1-\eta$.那么利用(2)我们有

$$|u_\varepsilon(x)-u_\varepsilon(x_0)| \leqslant C_1\varepsilon^{-1}|x-x_0| \leqslant C_1\varepsilon^{-1}(\lambda\varepsilon) = C_1\lambda = \frac{\eta}{2}, \forall x \in B(x_0,\lambda\varepsilon),$$

由此可得 $(1-|u_\varepsilon(x)|^2)^2 > \frac{\eta^2}{4}, \forall x \in B(x_0,\lambda\varepsilon)$.于是

$$\int_{B(x_0,\lambda\varepsilon)\cap B_R} (1-|u_\varepsilon|^2)^2 > \frac{\eta^2}{4}|B_R \cap B(x_0,\lambda\varepsilon)| \geqslant C_2\frac{\eta^2}{4}(\lambda\varepsilon)^2 = \mu\varepsilon^2. \tag{5}$$

从 $x_0 \in B^{l\varepsilon} \cap B_R$,我们可导出 $(B(x_0,\lambda\varepsilon)\cap B_R) \subset (B^{2l\varepsilon}\cap B_R)$.以此结合(5),我们得到

$$\int_{B^{2l\varepsilon}\cap B_R} (1-|u_\varepsilon|^2)^2 > \mu\varepsilon^2,$$

这与(3)矛盾,命题得证.

设 u_ε 是泛函 $E_\varepsilon(u,B_R)$ 的径向极小元.给定 $\eta \in (0,1/2)$,并置 λ,μ 是命题 1.4 中的常数.若

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{B(x^\varepsilon,2\lambda\varepsilon)\cap B_R} (1-|u_\varepsilon|^2)^2 \leqslant \mu,$$

则称 $B(x^\varepsilon,\lambda\varepsilon)$ 为 B_R 上的好圆盘.反之,便称 $B(x^\varepsilon,\lambda\varepsilon)$ 为 B_R 上的坏圆盘.

设 $\{B(x_i^\varepsilon,\lambda\varepsilon), i \in I\}$ 是一族满足如下条件

$$x_i^\varepsilon \in B_R, i \in I; B_R \subset \bigcup_{i\in I} B(x_i^\varepsilon,\lambda\varepsilon); B(x_i^\varepsilon,\lambda\varepsilon/4)\cap B(x_j^\varepsilon,\lambda\varepsilon/4) = \varnothing, i \neq j. \tag{6}$$

的圆盘.记 $J_\varepsilon = \{i \in I; B(x_i^\varepsilon,\lambda\varepsilon)$ 是 B_R 上的坏圆盘$\}$.则我们有

命题1.5 坏圆盘的个数有限.即存在不依赖于 $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ 的正常数 N,使得坏圆盘的个数 $\mathrm{Card}J_\varepsilon \leqslant N$.

证明 (6)蕴含 B_R 中每个点可以被有限个,不妨记为 m(不依赖于 ε)个以 $\lambda\varepsilon$ 为半径的圆盘覆盖.由坏圆盘的定义及引理 1.3,我们可以导出

$$\mu\varepsilon^2\mathrm{Card}J_\varepsilon \leqslant \sum_{i\in J_\varepsilon}\int_{B(x_i^\varepsilon,2\lambda\varepsilon)\cap B_R}(1-|u_\varepsilon|^2)^2 \leqslant m\int_{\bigcup_{i\in J_\varepsilon}B(x_i^\varepsilon,2\lambda\varepsilon)\cap B_R}(1-|u_\varepsilon|^2)^2 \leqslant m\int_{B_R}(1-|u_\varepsilon|^2)^2 \leqslant mC\varepsilon^2.$$

因此,$\mathrm{Card}J_\varepsilon \leqslant \frac{mC}{\mu} \leqslant N$.命题得证.

一旦有了命题1.5,我们便可将半径为 $\lambda\varepsilon$ 的坏圆盘作适当的修改.利用[2]中 Theorem IV.1,我们知存在 h 满足 $\lambda \leqslant h = h(\eta) \leqslant \lambda 9^N$,使得 $\{B(x_i^\varepsilon,h\varepsilon); i \in J\}$ 是一族满足如下条件

$$\bigcup_{i\in J_\varepsilon} B(x_i^\varepsilon,\lambda\varepsilon) \subset \bigcup_{i\in J} B(x_i^\varepsilon,h\varepsilon),$$

$$\mathrm{Card}J \leqslant \mathrm{Card}J_\varepsilon, |x_i^\varepsilon - x_j^\varepsilon| > 8h\varepsilon, i,j \in J, i \neq j$$

的坏圆盘.这表明新一族的坏圆盘中,每两个圆盘是不相交的.

定理0.1的证明 我们用反证法.假设 Z_ε 中存在一点 $x_0 \,\overline{\in}\, B(a,h\varepsilon)$.则圆周 $S_0 = \{x \in B_R; |x-a| = |x_0-a|\}$ 上的点 x 均满足 $|u_\varepsilon(x)|<1-\eta$.于是,从命题1.4我们可看到 S_0 上所有的点必含在 B_R 上的坏圆盘内.另一方面,由于 $|x_0-a| \geqslant h\varepsilon$,所以 S_0 不能被单个坏圆盘覆盖.于是 S_0 被至少两个不相交的坏圆盘覆盖.这是不可能的.

注 此定理蕴含,当 $\varepsilon \to 0$ 时,径向极小元的所有零点必向点 a 逼近.但另一方面,对任何泛函 $E_\varepsilon(u,B_R)$ 于 V 中的普通极小元,文[3]中已证得其零点当 $\varepsilon \to 0$ 时均趋向于点 $(1+R,0)$.这表明,泛函 $E_\varepsilon(u,B_R)$ 的径向极小元一定不是它在 V 中的普通极小元.

2　定理 0.2 的证明

利用中值定理,从引理 1.2 我们可知,对任意 $T \in (0,R)$,存在 $t \in [T/2,T]$ 使得

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon,\partial B(a,t)) \leqslant C + C|\ln\varepsilon|. \tag{7}$$

设 ρ_ε 是泛函

$$E(\rho,B_R \setminus B(a,t)) = \frac{1}{2}\int_{B_R \setminus B(a,t)} |\nabla\rho|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{B_R \setminus B(a,t)} (1-\rho)^2$$

于函数类 $H^1_{|u_\varepsilon|}(B_R \setminus B(a,t),R^+ \cup \{0\})$ 中的极小元,不难证明它存在,且是方程

$$-\Delta\rho = \frac{1}{\varepsilon^2}(1-\rho),\text{于 } B_R \setminus B(a,t) \tag{8}$$

的非负解.注意到 $\rho|_{\partial[B_R \setminus B(a,t)]} = |u_\varepsilon|$ 和 $|u_\varepsilon| \leqslant 1$,由极值原理我们可知 $\rho_\varepsilon \leqslant 1$.

命题 2.1　存在与 ε 无关的正常数 C,使得 $E(\rho_\varepsilon,B_R \setminus B(a,t)) \leqslant C\varepsilon|\ln\varepsilon|$.

证明　首先,在(8) 两端乘以$(\nu\cdot\nabla\rho)$,并在 $B_R \setminus B(a,t)$ 上积分,我们有

$$-\int_{\partial[B_R \setminus B(a,t)]}(\nu\cdot\nabla\rho)^2 + \int_{B_R \setminus B(a,t)}\nabla\rho\cdot\nabla(\nu\cdot\nabla\rho) = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{B_R \setminus B(a,t)}(1-\rho)(\nu\cdot\nabla\rho).$$

这里 ν 是 $\partial[B_R \setminus B(a,t)]$ 的单位外法向量.利用引理 1.2,我们可得

$$E(\rho_\varepsilon,B_R) \leqslant C|\ln\varepsilon|. \tag{9}$$

因此,

$$\begin{aligned}\left|\int_{B_R \setminus B(a,t)}\nabla\rho\cdot\nabla(\nu\cdot\nabla\rho)\right| &\leqslant C\int_{B_R \setminus B(a,t)}|\nabla\rho|^2 + \frac{1}{2}\left|\int_{B_R \setminus B(a,t)}\nu\cdot\nabla(|\nabla\rho|^2)\right| \\ &\leqslant C|\ln\varepsilon| + \frac{1}{2}\int_{\partial[B_R \setminus B(a,t)]}|\nabla\rho|^2.\end{aligned} \tag{10}$$

注意到 $\rho|_{\partial B_R} = |u_\varepsilon| = 1$,$\rho|_{\partial B(a,t)} = |u_\varepsilon|$ 和(7),利用引理 1.2 我们还可得到

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\left|\int_{B_R \setminus B(a,t)}(1-\rho)(\nu\cdot\nabla\rho)\right| \leqslant \frac{1}{2\varepsilon^2}\left|\int_{B_R \setminus B(a,t)}(1-\rho)^2\operatorname{div}\nu - \int_{\partial[B_R \setminus B(a,t)]}(1-\rho)^2\right| \leqslant C|\ln\varepsilon|.$$

将此式与(10) 代入(9) 得

$$\left|\int_{\partial[B_R \setminus B(a,t)]}(\nu\cdot\nabla\rho)^2\right| \leqslant C|\ln\varepsilon| + \frac{1}{2}\int_{\partial[B_R \setminus B(a,t)]}|\nabla\rho|^2.$$

注意到(7) 和 $|u_\varepsilon|_{\partial B_R} = 1$ 蕴含着 $\int_{\partial[B_R \setminus B(a,t)]}(\tau\cdot\nabla|u_\varepsilon|)^2 \leqslant C|\ln\varepsilon|$,其中 τ 为 $\partial[B_R \setminus B(a,t)]$ 上的单位切向量.以此结合上式,我们有

$$\int_{\partial[B_R \setminus B(a,t)]}|\nabla\rho|^2 = \int_{\partial[B_R \setminus B(a,t)]}(\tau\cdot\nabla|u_\varepsilon|)^2 + \int_{\partial[B_R \setminus B(a,t)]}(\nu\cdot\nabla\rho)^2 \leqslant C|\ln\varepsilon| + \frac{1}{2}\int_{\partial[B_R \setminus B(a,t)]}|\nabla\rho|^2.$$

这表明

$$\int_{\partial[B_R \setminus B(a,t)]}|\nabla\rho|^2 \leqslant C|\ln\varepsilon|. \tag{11}$$

将(8) 两端乘以$(1-\rho)$ 并在 $B_R \setminus B(a,t)$ 上积分,我们得到

$$\int_{B_R \setminus B(a,t)}|\nabla\rho|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{B_R \setminus B(a,t)}(1-\rho)^2 = -\int_{\partial(B_R \setminus B(a,t))}(\nu\cdot\nabla\rho)(1-\rho).$$

于是,从(7) 和(11) 我们可导出

$$\begin{aligned}E(\rho_\varepsilon,B_R \setminus B(a,t)) &\leqslant C\left|\int_{\partial(B_R \setminus B(a,t))}(\nu\cdot\nabla\rho)(1-\rho)\right| \leqslant C\left|\int_{\partial(B_R \setminus B(a,t))}(\nu\cdot\nabla\rho)^2\right|^{1/2} \\ &\quad \left|\int_{\partial(B_R \setminus B(a,t))}(1-\rho)^2\right|^{1/2} \leqslant C\varepsilon|\ln\varepsilon|.\end{aligned}$$

定理 0.2 的证明 注意到 u_ε 是极小元,并利用命题 2.1,我们有

$$\begin{aligned}E_\varepsilon(u_\varepsilon, B_R\setminus B(a,t)) &\leqslant E_\varepsilon\left(\rho_\varepsilon \frac{x-a}{|x-a|}, B_R\setminus B(a,t)\right)\\ &\leqslant \frac{1}{2(1-R)}\int_{B_R\setminus B(a,t)}\left[|\nabla\rho_\varepsilon|^2+\frac{1}{2\varepsilon^2}(1-\rho_\varepsilon{}^2)^2\right]+\frac{1}{2}\int_{B_R\setminus B(a,t)}\frac{1}{x_1}\rho_\varepsilon{}^2\left|\nabla\frac{x-a}{|x-a|}\right|^2\\ &\leqslant C\varepsilon|\ln\varepsilon|+\frac{1}{2}\int_{B_R\setminus B(a,t)}\frac{1}{x_1}\left|\nabla\frac{x-a}{|x-a|}\right|^2.\end{aligned}\tag{12}$$

由于$\frac{1}{2}\int_{B_R\setminus B(a,t)}\frac{1}{x_1}\left|\nabla\frac{x-a}{|x-a|}\right|^2\leqslant C$,所以我们得到了 $E_\varepsilon(u_\varepsilon, B_R\setminus B(a,t))$ 关于 ε 的一致上界.这蕴含着当 $\varepsilon\to 0$ 时,存在 u_ε 的子列 u_{ε_k} 和 $u_*\in H^1(B_R\setminus B(a,t))$,使得

$$u_{\varepsilon_k}\to u_*,\ \text{weakly in } H^1(B_R\setminus B(a,t)),\tag{13}$$

$$u_{\varepsilon_k}\to u_*,\ \text{in } L^2(B_R\setminus B(a,t)),\tag{14}$$

$$|u_\varepsilon|\to 1,\ \text{in } C(\overline{B_R\setminus B(a,t)}).\tag{15}$$

(14) 和(15) 包含 $u_*=\frac{x-a}{|x-a|}$ a.e.于 $B_R\setminus B(a,t)$.由于$\frac{x-a}{|x-a|}$是惟一的,所以(13) 可被改进为

$$u_\varepsilon\to\frac{x-a}{|x-a|},\ \text{weakly in } H^1(B_R\setminus B(a,t)).\tag{16}$$

从 $\int_{B_R\setminus B(a,t)}\frac{1}{x_1}|\nabla u|^2$ 的弱下半连续性,(16) 和(12),我们可导出

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B_R\setminus B(a,t)}\frac{1}{x_1}|\nabla u_\varepsilon|^2=\int_{B_R\setminus B(a,t)}\frac{1}{x_1}\left|\nabla\frac{x-a}{|x-a|}\right|^2.$$

以此结合(16),(14),我们不难得到 $u_\varepsilon\to\frac{x-a}{|x-a|}$, in $H^1(B_R\setminus B(a,t))$.再注意到 T 的任意性,我们便得到定理的结论.

3 定理 0.3 的证明

固定 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$.设 $u_1(x)=f_1(r)\frac{x-a}{|x-a|}$,$u_2(x)=f_2(r)\frac{x-a}{|x-a|}$ 为泛函 $E_\varepsilon(u,B_R)$ 的径向极小元,则它们均满足方程(1).因此,

$$-\Delta(u_1-u_2)+\frac{1}{x_1}(u_1-u_2)_{x_1}=\frac{1}{\varepsilon^2}[(u_1-u_2)-(u_1|u_1|^2-u_2|u_2|^2)]$$

上式两端乘以 $u_1-u_2=(f_1-f_2)\frac{x-a}{|x-a|}$,在 B_R 上积分并分部积分,有

$$\begin{aligned}&\int_{B_R}|\nabla(u_1-u_2)|^2dx+\int_{B_R}\frac{1}{x_1{}^2}(u_1-u_2)^2dx\\ &\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{B_R\setminus B(a,h\varepsilon)}(f_1-f_2)^2[1-(f_1{}^2+f_2{}^2+f_1f_2)]dx+\frac{C}{\varepsilon^2}\int_{B(a,h\varepsilon)}(f_1-f_2)^2dx.\end{aligned}\tag{17}$$

选取 $\eta<1-\frac{1}{\sqrt{2}}$,利用定理 0.1,我们可知在 $B_R\setminus B(a,h\varepsilon)$ 上,对任何给定的 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$,$f_1,f_2\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$.因此

$$\int_{B_R}|\nabla(f_1-f_2)|^2dx\leqslant\int_{B_R}|\nabla(u_1-u_2)|^2dx\leqslant\frac{C}{\varepsilon^2}\int_{B(a,h\varepsilon)}(f_1-f_2)^2dx.\tag{18}$$

令 $f=f_1-f_2$,我们知当 $x\in\partial B_R$ 时,$f(|x|)=0$.利用(18) 和嵌入不等式

$$\|f\|_{6,B_R}\leqslant C(B_R)\|\nabla f\|_{3/2,B_R},$$

我们可推出

$$\left[\int_{B_R}|f|^6\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{3}}\leqslant C(B_R)\int_{B_R}|\nabla f|^2\mathrm{d}x\leqslant C(\varepsilon,B_R)\int_G|f|^2\mathrm{d}x,$$

其中 $G=B(a,h\varepsilon)$.再利用 Holder 不等式,我们可得

$$\int_G|f|^2\mathrm{d}x\leqslant|G|^{\frac{2}{3}}\left[\int_G|f|^6\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{3}}\leqslant C(\varepsilon,B_R,\pi)h^{4/3}\int_G|f|^2\mathrm{d}x.$$

记 $F(\eta)=\int_{B(a,h(\eta)\varepsilon)}|f|^2\mathrm{d}x$,则

$$F(\eta)(1-C(\varepsilon,B_R,\pi)h^{4/3})\leqslant 0. \tag{19}$$

另一方面,由于 $C(\varepsilon,B_R,\pi)$ 不依赖于 η,我们可以选取 $\eta<1-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 充分小,使对固定的 $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$,$h=h(\eta)\leqslant\lambda 9^N=9^N\frac{\eta}{2C_1}$(最后的等式由(4)蕴含)满足

$$0<1-C(\varepsilon,B_R,\pi)h^{4/3}.$$

以此结合(19),我们可看出 $F(\eta)=0$.即 $f=0$ a.e.于 G.将此式代入(18)中,我们有 $f_1-f_2=C$ a.e.于 $[0,1]$.注意到 $u_1=u_2=x$ 于 ∂B_R,我们最终可得 $u_1=u_2$, a.e.于 $\overline{B_R}$.

[参考文献]

[1] Du Q, Gunzburger M. A model for superconducting thin films having variable thickness[J]. Physica D,1993,69:215—231.

[2] Bethuel F, Brezis H, Helein F. Ginzburg-Landau Vortices[M]. Birkhauser.1994.

[3] Ding S J, Liu Z H. On the zeros and asymptotic behavior of minimizers to the Ginzburg-Landau functional with variable coefficient [J]. J Partial Diff Eqs,1997,10:45—64.

[4] Bethuel F, Brezis H, Helein F. Asymptotics for the minimization of a Ginzburg-Landau functional[J]. Calc Var PDE,1993,1: 123—148.

[5] Struwe M. An asymptotic estimate for the Ginzburg-Landau model[J]. C R Acad Sci Paris,1993,317:677—680.

Radial Minimizer of the Ginzburg-Landau Functional with Variable Coefficient

Lei Yutian

(School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, 210097, Nanjing, PRC)

Abstract: The author studied the Ginzburg – Landau functional with variable coefficient. The location of the zeros of radial minimizer is presented. The H^1 convergence and the uniqueness of radial minimizer are proved.

Key words: Ginzburg-Landau functional with variable coefficient, radial minimizer, location of zeros

[责任编辑:陆炳新]