具有年龄结构的捕食系统的动力学行为

谭远顺[1,2]，陆炳新[1]

(1.南京师范大学数学与计算机科学学院，210097，南京)
(2.湖北民族学院理学院，445000，湖北恩施)

[摘要]　研究了一类捕食者具有年龄结构的捕食系统的动力学行为.应用差分方程的比较原理，离散半动力系统的持久性定理以及单调算子的三分稳定性，获得系统的有界性，一致持久性，永久持久性.

[关键词]　弱持久，强持久，一致持久，永久持久

[中图分类号]34C05，34C23，[文献标识码]A，[文章编号]1001-4616(2004)01-0013-07

1　有界性

文[1]考虑了一类捕食者具有年龄结构的捕食系统：

$$
\begin{aligned}
x(t+1) &= x(t)f(x)g(y_2(t)),\\
y_1(t+1) &= s_1 y_1(t) + x(t)[1-g(y_2(t))],\\
y_2(t+1) &= by_1(t) + s_2 y_2(t).
\end{aligned}
$$

获得了系统的有界性，一致持久性，永久持久性定理.但是，没有考虑成年捕食者在哺乳期捕食率的相对增长，从而不能很好的描述其生态行为.本文研究以下系统：

$$
\begin{aligned}
x(t+1) &= x(t)g(x(t)+\sum_{i=k+1}^{n}(\beta_i y_i(t))),\\
y_1(t+1) &= x(t)[1-g(\sum_{i=k+1}^{n}(\beta_i y_i(t)))/g(0)] + s_1 y_1(t),\\
y_i(t+1) &= b_{i-1}y_{i-1}(t) + s_i y_i(t),\ i=2,3,\cdots,n.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

这里，$x(t)$ 表示第 t 代食饵种群密度，$y_i(t)$ 表示第 t 代第 i 个年龄阶段捕食者种群密度($i=1,\cdots,n$)，β_i 为正常数，表示捕食者对食饵的捕食系数($i=k+1,\cdots,n$)，b_{i-1}，s_i 分别表示从第 $i-1$ 类到第 i 类捕食种群的转化系数和第 i 类捕食种群滞留比率($i=2,\cdots,n$).$g:[0,\infty)\to R$ 是一严格递减且 $g(0)>1$ 的光滑函数.

模型可作如下解释：设第 1 类到第 k 类为幼年捕食种群，无捕食能力，依赖其父母为生.$g(\sum_{i=k+1}^{n}(\beta_i y_i(t)))/g(0)$ 为食饵未被发现的概率，则 $1-g(\sum_{i=k+1}^{n}(\beta_i y_i(t)))/g(0)$ 为食饵被发现的概率.为便于研究，做如下定义 记$(x(t),y_1(t),\cdots y_n(t))\equiv(x,y_1,\cdots y_n)$.定义映射 $f:R_+^{\ n+1}\to R_+^{\ n+1}$，$f_0(x,y_1,\cdots,y_n)=x(t+1)$，$f_i(x,y_1,\cdots,y_n)=y_i(t+1)(i=1,\cdots,n)$，$f^t$ 表示 $\underbrace{ff\cdots f}_{t个}(x,y_1,\cdots,y_n)$ 则 $f_i^{\,t}(x,y_1,\cdots,y_n)$ 表示取值于 $(x,y_1,\cdots,y_n)\in R_+^{\ n+1}$ 的映射 f^t 的第 i 类($i=1,\cdots,n$)个体，因而 f^t 描述了系统(1) t 代以后的种群密度状态.

考虑食饵种群.定义一维映射 $h:R_+\to R_+$，$h(x)=xg(x)$.由 $g(x)$ 的性质知 $h(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上存在唯一不动点 x^* 且当 $0<x<x^*$ 时 $h(x)>x$，当 $x>x^*$ 时 $h(x)<x$.因此在 h 迭代下 $I\equiv h([0,x^*])$ 是一紧不变区间，从 R_+ 中出发的任一点在 f 迭代下进入并停留在 I 内部或以 $\max I$ 为极限.

为证系统的有界性我们考虑以下矩阵模型

收稿日期：2003-09-17.
基金项目：国家自然科学基金资助(编号 19871041).
作者简介：谭远顺，1974－，南京师范大学数学与计算机科学学院博士研究生，主要从事微分方程定性理论研究，E－mail：Ystan@pine.njnu.edu.cn

$$X(t+1) = P(X(t))X(t), t = 0,1,\cdots, \tag{2}$$

这里 $X(t) = (X_1(t),\cdots,X_n(t))^{\mathrm{T}}$,$P(X(t))$ 为一 $n \times n$ 矩阵.

对于一个具阶段结构的人口模型由[2]易知非负的凸矩阵 $P(X(t))$ 可以分解成一生殖矩阵 $F(X(t)) = [f_{ij}]$ 和一类转化矩阵 $T(X(t)) = [t_{ij}]$ 之和,即 $P(X(t)) = F(X(t)) + T(X(t))$.

我们先证明一个引理.

引理 1　设存在常数 $\delta > 0, K > 0$ 使对所有 $X \in R_+{}^n, i,j = 1,2,\cdots,n$ 有

$$0 \leqslant t_{ij} \leqslant 1, \sum_{i=1}^{n} t_{ij}(X) \leqslant \delta < 1,$$
$$0 \leqslant f_{ij}, \| F(X)X \| \leqslant K.$$

则模型(2)是耗散的

证明　由于 $\| T(X)X \| \leqslant \delta \| X \|$ 则

$$\| X(t+1) \| = \| P(X(t))X(t) \| = \| [F(X(t)) + T(X(t))]X(t) \| \leqslant$$
$$\| [F(X(t))X(t) \| + \| T(X(t))X(t) \| \leqslant \delta \| X(t) \| + K, t = 0,1,\cdots.$$

由于 $0 < \delta < 1$ 由迭代法易知 $\| X(t) \| \leqslant \delta^t \| X(0) \| + K \sum_{i=1}^{t-1} \delta^i \leqslant \delta^t \| X(0) \| + \frac{K}{1-\delta}$

所以存在正整数 $t' \geqslant 1$ 使得 $\| X(t) \| \leqslant \frac{2K}{1-\delta}$　$t = t', t'+1, \cdots$

此即说明模型(2)是点耗散的.

引理 2[3]　设 $Y(t) = (Y_1(t),\cdots,Y_n(t))^{\mathrm{T}}, Y(t+1) = F(Y(t)) = (F_1 Y_1(t),\cdots,F_n Y_n(t))^{\mathrm{T}}$,如下列条件满足

(i) $X(t_1) \leqslant Y(t_1)$;

(ii) $F(X) \leqslant F(Y)$　$X < Y$;

(iii) $X(t+1) \leqslant F(X(t))$,　$t = t_1, t_1+1, \cdots$.

那么,对于 $t = t_1, t_1+1, \cdots$ 都有 $X(t) \leqslant Y(t)$.

定理 1　如果 $0 < b_i < 1(i = 1,\cdots,n-1), 0 < s_i < 1(i = 1,\cdots,n)$,则系统(1)是有界的.

证明　因为 $h(x) = xg(x), I = h[(0,x^*)]$.由 I 的紧不变性知:

当 $x \in [0,\max I]$ 时,$h(x) = xg(x) \in [0,\max I]$. 设 $(x,y_1,\cdots,y_n) \in R_+{}^{n+1}$,则 $f_0(x,y_1,\cdots,y_n) = xg(x + \sum_{i=k+1}^{n} \beta_i y_i) \leqslant xg(x) \in [0,\max I]$;

当 $x > \max I > x^*$ 时,由 g 函数的性质知

$$f_0(x,y_1,\cdots,y_n) = xg(x + \sum_{i=k+1}^{n} \beta_i y_i) \leqslant xg(x) < x.$$

因而食饵种群是有界的,即 $\exists B > 0, t_1 > 0$,使得当 $t \geqslant t_1$ 时 $x(t) \leqslant B$.

下面我们考捕食种群的有界性.

由系统(1),我们有当 $t \geqslant t_1$ 时,

$$y_1(t+1) \leqslant B[1 - \frac{g(\sum_{i=k+1}^{n} \beta_i y_i)}{g(0)}] + s_1 y_1(t),$$
$$y_i(t+1) = b_{i-1} y_{i-1}(t) + s_i y_i(t), \ i = 2,\cdots,n. \tag{3}$$

考虑方程

$$\bar{y}_1(t+1) = B[1 - \frac{g(\sum_{i=k+1}^{n} \beta_i \bar{y}_i)}{g(0)}] + s_1 \bar{y}_1(t),$$
$$\bar{y}_i(t+1) = b_{i-1} \bar{y}_{i-1}(t) + s_i \bar{y}_i(t), \ i = 2,\cdots,n. \tag{4}$$

即

$$\bar{y}(t+1)=\begin{bmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 & \frac{B}{\bar{y}_n}\left[1-\frac{g\left(\sum_{i=k+1}^{n}\beta_i\bar{y}_i\right)}{g(0)}\right] \\ b_1 & s_2 & & & \\ & b_2 & s_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & b_{n-1} & s_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{y}_1(t)\\ \vdots \\ \bar{y}_n(t)\end{bmatrix} \tag{5}$$

这里

$$P(\bar{y}(t))=\begin{bmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 & \frac{B}{\bar{y}_n}\left[1-\frac{g\left(\sum_{i=k+1}^{n}\beta_i\bar{y}_i\right)}{g(0)}\right] \\ b_1 & s_2 & & & \\ & b_2 & s_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & b_{n-1} & s_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_1 & s_2 & & & \\ & b_2 & s_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & b_{n-1} & s_n \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{B}{\bar{y}_n}\left[1-\frac{g\left(\sum_{i=k+1}^{n}\beta_i\bar{y}_i\right)}{g(0)}\right] \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}\equiv [t_{ij}(\bar{y})]+[f_{ij}(\bar{y})].$$

易知(5)满足引理1的所有条件，因此系统(4)是点耗散的，由引理2知系统(1)中捕食种群是有界的.

2 弱持久和强持久

先给出关于持久性的定义

定义[4] (a) 系统(1)在 N 是强持久的，如果 $x(t)>0, y_i(t)>0, (i=1,2,\cdots,n)$ 对于任意 $t=0,1,\cdots,N$；

(b) 系统(1)在 N 是弱持久的，如果 $x(t)>0, y_i(t)>0, (i=0,1,\cdots,n)$ 对于 $t=0,1,\cdots,N-1$，而 $x(N)>0, y_i(N)\geqslant 0$，且 $\sum_{i=1}^{n}y_i(N)>0$；

(c) 系统(1)是强持久的，如果对 $N=0,1,\cdots$，它在 N 强持久并且 $\limsup_{t\to\infty}x(t)>0, \limsup_{t\to\infty}y_i(t)>0, i=1,2,\cdots,n$；

(d) 系统(1)是弱持久的，无论它在 $N=0,1,\cdots$ 是强持久还是弱持久，只要 $\limsup_{t\to\infty}x(t)>0, \limsup_{t\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i(t)\right)>0, (i=1,2,\cdots,n)$；

(e) 系统(1)是一致持久的如果它在 $N=0,1,\cdots$ 强持久且存在常数 $\eta>0$ 使 $\liminf_{t\to\infty}x(t)>\eta, \liminf_{t\to\infty}y_i(t)>\eta, (i=1,2,\cdots,n)$

(f) 系统(1)是永久持久的，如果它一致持久且点耗散.

定理2 假设系统(1)在0强持久，且以下条件成立

$$-x^*\frac{g'(0)}{g(0)}>\frac{\prod_{i=1}^{n}(1-s_i)}{\sum_{j=k}^{n-1}\left[\left(\prod_{i=1}^{j}b_i\right)\beta_{j+1}\prod_{m=j+2}^{n}(1-s_m)\right]}. \tag{6}$$

则系统(1)强持久

证明 系统(1)在0强持久,由归纳法可知,系统(1)在 N 强持久,$N = 1,2,\cdots$,在$(0,\cdots,0)$处系统(1)的线性近似方程的特征多项式为

$$P(\lambda) = \lambda(\lambda - g(0))(\lambda - s_2)\cdots(\lambda - s_n).$$

由于 $g(0) > 1$ 显然有

$$P(1) = (1 - g(0))(1 - s_2)\cdots(1 - s_n) < 0.$$

所以$(0,\cdots,0)$是不稳定的.

在$(x^*,\cdots,0)$处系统(1)的线性近似方程的特征多项式为(为方便,记 $x^* g'(x^*) = m, x^* g'(0)/g(0) = n$)

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - m - 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\beta_{k+1}m & \cdots & -\beta_{n-1}m & -\beta_n m \\ 0 & \lambda - s_1 & 0 & \cdots & 0 & \beta_{k+1}n & \cdots & \beta_{n-1}n & \beta_n n \\ 0 & -b_1 & \lambda - s_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -b_{n-1} & \lambda - s_n \end{vmatrix}$$

因为

$$P(1) = -m[(1 - s_1)\cdots(1 - s_n) + (b_1\cdots b_k\beta_{k+1}(1 - s_{k+2}\cdots(1 - s_n) + \cdots + b_1\cdots b_{n-1}\beta_n)n)]$$

由(6)知 $P(1) < 0$ 所以$(x^*,\cdots,0)$是不稳定的.由[4]知系统是强持久的.类似可证

定理3 假设 $s_i = 0$ 系统(1)在0弱持久,则系统(1)弱持久,如果不等式(6)满足

注1 由定理2,定理3,我们发现系统(1)弱持久或强持久严格依赖于捕食者的初始信息.

注2 定理条件要求每一阶段群密度都有损耗,这是符合自然规的,无损耗的情况可作近似处理.

3 永久持久

设(X,d)为一度量空间,Y为其闭子集,$f: X \to X$连续,$f(X) \subset Y$,$f|_Y: Y \to Y$,是连续的,$f(X/Y) \subset X/Y$.

为证明系统的永久持久性定理,先给出以下几个引理.

引理3[5] (1)如果食饵子系统 $h(x)$ 在$(0,x^*)$内无最大值,则平衡态是全局稳定的,

(2)对 $h(x)$ 如存在 $x_m, 0 < x_m < x^*$ 使 $h'(x_m) = 0$ 且当 $0 < x < x_m$ 时 $h'(x_m) > 0$ 当 $x > x_m$ 时 $h'(x_m) < 0$ 则平衡态 x^* 全局稳定的充要条件是 $h(x)$ 无周期2点.

引理4[5] 对度量空间中满足以上条件的 $f(x)$,如以下条件满足:

(i)对任意 $\bar{x} \in X$,$f^t(\bar{x})$ 是一紧的正轨;

(ii)在 X 中,f 是点耗散的;

(iii)$f|_Y$ 有一非循环覆盖 $\pi = \{M_1, M_2, \cdots, M_k\}$;

(iv)$W^s(M_i) \cap X/Y = \phi, i = 1,2,\cdots,k$.

则系统关于 f 是永久持久的.

引理5[4] 设 $T: R_+^n \to R_+^n$ 是一单调连续算子且具有以下特征:

(a)存在一正整数 k,使对所有的 $0 < \lambda < 1$ 和 $x > 0$ 有 $\lambda T^k(x) < T^k(\lambda x)$;

(b)存在一正整数 l,使对所有的 $x \geqslant 0 (x \neq 0)$ 有 $T^l > 0$.则必有以下之一成立:

(i)每一非零轨道是无界的;

(ii)每一轨道趋于的唯一零不动点;

(iii)每一非零轨道趋于唯一的非零不动点 $q, q > 0$.

定理4 设 $0 < b_i < 1, 0 < s_i < 1$,系统(1)在0强持久,如果食饵子系统 $h(x)$ 无周期2点或者在$(0,x^*)$内无最大值,且(6)与下式成立

$$\lambda\left[1 - \frac{g\left(\sum_{i=k+1}^{n} \beta_i y_i\right)}{g(0)}\right] < \left[1 - \frac{g\left(\sum_{i=k+1}^{n} \lambda\beta_i y_i\right)}{g(0)}\right] \tag{7}$$

则系统(1)永久持久

证明　定义 $C_1 = \{(x, y_1, \cdots, y_n) \in R_+^{n+1} \mid x = 0\}$,

$C_2 = \{(x, y_1, \cdots, y_n) \in R_+^{n+1} \mid y_i = 0\}$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

令 $Y = C_1 \cup C_2$,我们只须证明 Y 一致排斥系统(1)的所有正解,即证明引理4的所有条件得以满足.

由定理1知引理4的条件(i)(ii)满足.我们只须验证(iii)(iv).在 Y 中 f 仅有两个不变集 $M_1 = \{(0, 0, \cdots, 0)\}$, $M_2 = \{(x^*, 0, \cdots, 0)\}$,设 $(\bar{x}, \bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_n)$ 是从 C_1 出发的一个解,由系统(1)以及 $0 < s_i < 1$ 知:

$$\lim_{t\to\infty} \bar{y}_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

即从 C_1 出发的点当 t 无限大时趋于 $(0, 0, \cdots, 0)$

设 $\bar{x}, \bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_n$ 是从 C_2 出发的轨线上的点且 $x(0) > 0$,由于 x^* 是映射 $h(\bar{x}) = \bar{x}g(\bar{x})$ 的正平衡态,由定理条件和引理3我们有

$$\lim_{t\to\infty} \bar{x}(t) = x^* .$$

这表明 如果不变集 M_1, M_2 是孤立的,则 $\{M_1, M_2\}$ 是孤立的,且为 Y 的一个非循环覆盖.

最后验证(iv)

假如 $W^s(M_1) \cap R_+^{n+1}/Y \neq \phi$,设 $(\bar{x}, \bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_n)$ 为 R_+^{n+1}/Y 中的一正轨,使得

$$\lim_{t\to\infty} (\bar{x}, \bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_n) = (0, 0, \cdots, 0).$$

由于 g 连续且 $g(0) > 0$,选择足够小的 $x, y_i (i = k+1, \cdots, n)$,使 $g(x + \sum_{i=k+1}^{n} \beta_i y_i) > 1$,对足够大的 t 有

$$\bar{x}(t+1) = \bar{x}(t) g(x + \sum_{i=k+1}^{n} \beta_i y_i) > \bar{x}(t).$$

这与 $\lim_{t\to\infty} \bar{x}(t) = 0$ 矛盾.

假设 $W^s(M_2) \cap R_+^{n+1}/Y \neq \phi$,设 $(\bar{x}, \bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_n)$ 为 R_+^{n+1}/Y 中一正轨,使得 $\lim_{t\to\infty} (\bar{x}, \bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_n) = (x^*, 0, \cdots, 0)$.

$\forall \varepsilon > 0$ 取 $t_0 > 0$ 足够大,使当 $t \geqslant t_0$ 时

$$x^* - \varepsilon < \bar{x}(t) < x^* + \varepsilon \tag{8}$$

由系统(1)当 $t \geqslant t_0$ 时

$$\begin{aligned} \bar{y}_1(t+1) &\geqslant (x^* - \varepsilon)\left[1 - \frac{g(\sum_{i=k+1}^{n} \beta_i \bar{y}_i)}{g(0)}\right] + s_1 \bar{y}_1(t), \\ \bar{y}_i(t+1) &= b_{i-1} \bar{y}_{i-1}(t) + s_i \bar{y}_i(t), i = 2, \cdots, n. \end{aligned} \tag{9}$$

我们考虑

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1(t+1) &= (x^* - \varepsilon)\left[1 - \frac{g(\sum_{i=k+1}^{n} \beta_i \tilde{y}_i)}{g(0)}\right] + s_1 \tilde{y}_1(t), \\ \tilde{y}_i(t+1) &= b_{i-1} \tilde{y}_{i-1}(t) + s_i \tilde{y}_i(t), i = 2, \cdots, n. \end{aligned} \tag{10}$$

定义映射 $T: R_+^n \to R_+^n$

$$T_1(\tilde{y}) = (x^* - \varepsilon)\left[1 - \frac{g(\sum_{i=k+1}^{n} \beta_i \tilde{y}_i)}{g(0)}\right],$$

$$T_i(\tilde{y}) = b_{i-1} \tilde{y}_{i-1}(t) + s_i \tilde{y}_i(t), i = 2, \cdots, n.$$

这里 $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \cdots, \tilde{y}_n)$.显然 T 是一单调连续算子.由于

$$\lambda\left[1 - \frac{g(\sum_{i=k+1}^{n} \beta_i y_i)}{g(0)}\right] < \left[1 - \frac{g(\sum_{i=k+1}^{n} \lambda \beta_i y_i)}{g(0)}\right],$$

故取 $l = n, k = n$,我们有

(a) $\lambda T^n\tilde{y} < T^n(\lambda\tilde{y})$ 对所有 $0 < \lambda < 1$, $\tilde{y} > 0$;

(b) $T^n\tilde{y} > 0$,对所有 $\tilde{y} \geqslant 0(\bar{y} \neq 0)$ 由引理知必使其中之成立一.

定义

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \cdots & -\frac{\beta_{k+1}(x^* - \varepsilon)g'(0)}{g(0)} & \cdots & -\frac{\beta_{n-1}(x^* - \varepsilon)g'(0)}{g(0)} & -\frac{\beta_n(x^* - \varepsilon)g'(0)}{g(0)} \\ b_1 & s_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & s_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{n-1} & s_n & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由不等式(6)和(8)知 A_ε 有一个大于1的特征根,所以(10)的不动点(0,…,0)是不稳定的,引理5(ii)不满足,又因 A_ε 是一正的非对角矩阵,由 Perron-Frobenius 定理[2],对 A_ε 最大的特征值,存在相应的正特征向量 $V = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$.选取 $l > 0$ 充分小使 $lv_i < \bar{y}_i(t_0)$, $i = 1,2,\cdots,n$.如果 $(\tilde{y}_1(t),\cdots,\tilde{y}_n(t))$ 是系统(10)具有初值 $\tilde{y}_i(t_0) = lv_i$ 的解,由引理2,当 $t \geqslant t_0$ 时我们有 $\bar{y}_i(t) > \tilde{y}_i(t)$.如果($i$)满足则当 $t \to \infty$ 时,因 $\tilde{y}_i(t) \to \infty$,所以 $\bar{y}_i(t) \to \infty$ 这与定理1矛盾,如果(iii)满足,设 $(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ 为 T 的唯一正不动点,则 $\lim\limits_{t\to\infty}\bar{y}_i(t) \geqslant q_i > 0(i = 1,2,\cdots,n)$ 这与 $\lim\limits_{t\to\infty}\bar{y}_i(t) = 0$ 矛盾,因而 $W^s(M_2) \cap X/Y = \phi$.所以系统是强持久的.

注 当 $\beta_i = 0, b_i = 0, (i = 2,\cdots,n), s_i = 0, (i = 3,\cdots,n)$,由定理条件可以得到文[1]的所有结果.

4　应用

考虑系统[5]

$$\begin{aligned} x(t+1) &= x(t)exp(r(1-x))\exp(-r\beta y_2) \\ y_1(t) &= s_1y_1(t) + x(t)[1 - \exp(-r\beta y_2)] \\ y_2(t+1) &= by_1(t) + s_2y_2(t) \end{aligned} \tag{11}$$

定理5

如果 $\beta r > \frac{(1-s_1)(1-s_2)}{b}$, $0 < r \leqslant 2$ 则系统(11)是永久持久的.

证明　易知当 $0 < r \leqslant 2$ 时,$h(x) = x\exp(r(1-x))$ 的不动点 $x^* = 1$ 是全局稳定的.

下面验证其满足(6)和(7)

对于 $0 < \lambda < 1$,由于

$$\lambda[1 - g(y_2)] = \lambda[1 - \exp(-r\beta y_2)]$$
$$[1 - g(\lambda y_2)] = [1 - \exp(-\lambda r\beta y_2)]$$

令

$$P_1(y_2) = 1 - \exp(-\lambda r\beta y_2) - \lambda + \lambda\exp(-r\beta y_2)], \lambda \in (0,1).$$

则 $P_1(0) = 0$ 且

$$P'_1(y_2) = \lambda\beta r[\exp(-\lambda r\beta y_2) - \exp(-r\beta y_2)] > 0, y_2 > 0$$

因此当 $y_2 > 0, \lambda \in (0,1)$ 时

$$1 - \exp(-\lambda\beta ry_2) - \lambda[1 - \exp(-\beta ry_2)] > 0$$

所以(7)满足

由于 $\beta r > \frac{(1-s_1)(1-s_2)}{b}$,所以(6)满足

由定理4知系统(11)是永久持久的.

致谢 感谢导师罗定军教授的关怀、教导以及对本文的写作提出的建议.

[参考文献]

[1] 谭远顺,魏代俊.具有年龄结构的捕食系统的动力学行为[J].湖北民族学院学报(自然科学版),2002,1(20):9—13.
[2] Cushing J M. An Introduction to Structured Population Dynamics[J]. Society for Industrial and Applied Mathematics, Tucson, Arizona, 1998.
[3] Allen Is, Moulon Mp, Rose F L. persistence in an age-structured population for a patch-type enviroment[J]. Natural Resource Modeling. 1990, 4:197—214.
[4] Vivian Hutson, Klaus Schmitt. Permanence and the Dynamics of Biological System[M]. New York: Elsevier Science Publishing Co. Inc, 1992. 14—15.
[5] Cull P Local, Globial. Stability for Population Models[J]. Biol Cybern, 1986, 54:141—149.

Dynamics of Predator-prey System with Age Structure

Tan Yuanshun[1,2], Lu Bingxin[1]

(1. School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, 210097, Nanjing, PRC)
(2. Department of Mathematics of Hubei National College, 445000, Hubei Enshi, PRC)

Abstract: This article studies the dynamical action of a predator-prey system with age structure. Using the comparion theorem of difference equation, persistence theorem of discrete semi-dynamical system and stability of monotonous operator, we gain the boundary, uniform persistence and permanence of the system.

Key words: weak persistence, strong persistence, uniform persistence, permanence

[责任编辑:陆炳新]