第 27 卷第 1 期 南京师大学报(自然科学版) Vol.27 No.1
2004 年 JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY(Natural Science) 2004

有关非负矩阵谱半径及分离度界的估计

谈雪媛

(南京师范大学数学与计算机科学学院,210097,南京)

[摘要] 给出了非负矩阵谱半径上下界的一个估计,并将我们的结果与以往的结论做比较;在推论部分给出了非奇异 M 矩阵之逆的谱半径的界的估计以及任意复矩阵谱半径的一个上界的估计.另外,我们还给出了非负矩阵分离度的上界估计.

[关键词] 非负矩阵,M 矩阵,谱半径,分离度

[中图分类号]O241.6, [文献标识码]A, [文章编号]1001-4616(2004)01-0024-04

0 引言

非负矩阵是指元素为非负实数的一类特殊矩阵,在经济数学、概率论、物理、化学等学科中有重要的地位.有关非负矩阵谱半径的界值的估计在许多书籍与文献中均有阐述.设 $A=[a_{ij}]\in R^{n\times n}$ 为非负矩阵,$\rho(A)$ 为 A 的谱半径.以下给出某些已有的结论.

引理 1[1] 若 A 的各个行和为常数 C_1,那么 $\rho(A)=C_1$;

若 A 的各个列和为常数 C_2,那么 $\rho(A)=C_2$.

引理 2[1] $\min\limits_i\sum\limits_j a_{ij}\leqslant\rho(A)\leqslant\max\limits_i\sum\limits_j a_{ij}$ 及 $\min\limits_j\sum\limits_i a_{ij}\leqslant\rho(A)\leqslant\max\limits_j\sum\limits_i a_{ij}$

引理 3[1] 若 A 有一个正特征向量 $x=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^{\mathrm T}$,命 $\max\limits_i x_i=x_p$,$\min\limits_i x_i=x_q$,则对 $m=1,2,\cdots$ 以及 $i=1,2,\cdots,n$ 有

$$\frac{x_q}{x_p}\sum_j a_{ij}^{(m)}\leqslant\rho(A)\leqslant\frac{x_p}{x_q}\sum_j a_{ij}^{(m)},$$

其中 $A^m\equiv[a_{ij}^{(m)}]$.

引理 4[2] 设 A 是一个 n 阶非负矩阵,则

(1) $\rho(A)$ 是 A 的特征值,且属于 $\rho(A)$ 的特征向量可取作非负的,即存在不为零的非负向量 x,使得 $Ax=\rho(A)x$.

(2) 若 A 有一个正的特征向量 x,则 x 必是属于 $\rho(A)$ 的特征向量.

(3) A 的特征值可分为若干组,每组中的特征值模都相等,而且均匀地分布在以原点为心的某一圆周上.

引理 5[1] 若 $\sum\limits_j a_{ij}>0$,$i=1,2,\cdots,n$,则 $\rho(A)>0$.

1 主要结论以及证明

引理 6 设 A 是 $n\times n$ 阶非负矩阵.若 A 有若干零行(列),设其编号为 $k_1,k_2,\cdots,k_t$,划去 A 的 $k_1,k_2,\cdots,k_t$ 行(列)以及 $k_1,k_2,\cdots,k_t$ 列(行)后所得的矩阵为 $\bar A$,则 $\rho(A)=\rho(\bar A)$.

以下总是记 $e=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm T}$,$A^k\equiv[a_{ij}^{(k)}]$,$i,j=1,2,\cdots,n$.

引理 7

$$\sum_j a_{ij}^{(k+1)}=\sum_t a_{it}\sum_j a_{tj}^{(k)}\quad i=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

$$\sum_i a_{ij}^{(k+1)}=\sum_t a_{tj}\sum_i a_{it}^{(k)}\quad j=1,2,\cdots,n \tag{2}$$

收稿日期:2003-10-11.

作者简介:谈雪媛,女,1977-,南京师范大学数学与计算机科学学院教师,在读硕士研究生,从事数值代数的学习与研究,E-mail:waly0655@sina.com

证明　由 $A^{k+1}e = AA^k e$ 得

$$\left[\sum_j a_{1j}^{(k+1)}, \sum_j a_{2j}^{(k+1)}, \cdots, \sum_j a_{nj}^{(k+1)}\right]^T = A\left[\sum_j a_{1j}^{(k)}, \sum_j a_{2j}^{(k)}, \cdots, \sum_j a_{nj}^{(k)}\right]^T,$$

进而可得(1)式.类似地,由 $e^T A^{k+1} = e^T A^K A$ 可得(2)式.

定理1　设 A 为 $n \times n$ 阶非负矩阵,无零行也无零列,则

$$\min_j \frac{\sum_i a_{ij}^{(k+1)}}{\sum_i a_{ij}^{(k)}} \leqslant \rho(A) \leqslant \max_j \frac{\sum_i a_{ij}^{(k+1)}}{\sum_i a_{ij}^{(k)}}.$$

证明　A 是非负阵,由引理4与5得,$\rho(A) > 0$,且存在对应于 $\rho(A)$ 的非零非负特征向量 $x = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$,使 $Ax = \rho(A)x$,从而有

$$A^k x = \rho^k(A)x \tag{3}$$

$$A^{k+1}x = \rho^{k+1}(A)x \tag{4}$$

从(3)式可得　$e^T A^k x = \rho^k(A)e^T x$,即

$$\left[\sum_i a_{i1}^{(k)}, \sum_i a_{i2}^{(k)}, \cdots, \sum_i a_{in}^{(k)}\right][x_1, x_2, \cdots, x_n]^T = \rho^k(A)\sum_i x_i,\text{即}$$

$$\sum_j x_j \sum_i a_{ij}^{(k)} = \rho^k(A)\sum_i x_i \tag{5}$$

同理,从(4)式可得

$$\sum_j x_j \sum_i a_{ij}^{(k+1)} = \rho^{k+1}(A)\sum_i x_i \tag{6}$$

据假设知 $\sum_i a_{ij}^{(k)} > 0, \sum_i a_{ij}^{(k+1)} > 0, i = 1, 2, \cdots, n.$

将(6)式与(5)式相除,得

$$\rho(A) = \frac{\sum_j x_j \sum_i a_{ij}^{(k+1)}}{\sum_j x_j \sum_i a_{ij}^{(k)}} \leqslant \max_{x_j \neq 0} \frac{x_j \sum_i a_{ij}^{(k+1)}}{x_j \sum_i a_{ij}^{(k)}} = \max_{x_j \neq 0} \frac{\sum_i a_{ij}^{(k+1)}}{\sum_i a_{ij}^{(k)}} \leqslant \max_j \frac{\sum_i a_{ij}^{(k+1)}}{\sum_i a_{ij}^{(k)}},$$

同理可得

$$\rho(A) = \frac{\sum_j x_j \sum_i a_{ij}^{(k+1)}}{\sum_j x_j \sum_i a_{ij}^{(k)}} \geqslant \min_{x_j \neq 0} \frac{x_j \sum_i a_{ij}^{(k+1)}}{x_j \sum_i a_{ij}^{(k)}} = \min_{x_j \neq 0} \frac{\sum_i a_{ij}^{(k+1)}}{\sum_i a_{ij}^{(k)}} \geqslant \min_j \frac{\sum_i a_{ij}^{(k+1)}}{\sum_i a_{ij}^{(k)}},$$

因此有

$$\min_j \frac{\sum_i a_{ij}^{(k+1)}}{\sum_i a_{ij}^{(k)}} \leqslant \rho(A) \leqslant \max_j \frac{\sum_i a_{ij}^{(k+1)}}{\sum_i a_{ij}^{(k)}}.$$

推论1　若 A 为 $n \times n$ 非负矩阵,无零行也无零列,则

$$\min_i \frac{\sum_j a_{ij}^{(k+1)}}{\sum_j a_{ij}^{(k)}} \leqslant \rho(A) \leqslant \max_i \frac{\sum_j a_{ij}^{(k+1)}}{\sum_j a_{ij}^{(k)}}.$$

证明　对 A^T 应用定理1的结论即得.

推论2　设 A 为非奇异 M 矩阵,并设 A 表为 $A = sI - B, \rho(B) < s, B \geqslant 0$,则

$$s - b_k \leqslant \frac{1}{\rho(A^{-1})} \leqslant s - a_k,\text{其中}$$

$$a_k = \min_j \frac{\sum_i b_{ij}^{(k+1)}}{\sum_i b_{ij}^{(k)}}, b_k = \max_j \frac{\sum_i b_{ij}^{(k+1)}}{\sum_i b_{ij}^{(k)}}.$$

(注:文[4]中称 $\frac{1}{\rho(A^{-1})}$ 为 A 的最小特征值,并记之为 $\tau(A)$,其最重要的性质是 $\tau(A) \geqslant \mathrm{Re}(\lambda)$,对任何 $\lambda \in \sigma(A)$.)

证明　由于A是非奇异M矩阵,$s-\rho(B)$是A的最小模的实特征值,且A^{-1}为非负矩阵,且有$\dfrac{1}{\rho(A^{-1})}=s-\rho(B)$[4].不妨假设非负阵$B$无零行及零列(例如在表示式$A=sI-B$中取$s>\max\limits_i a_{ii}$),应用定理1得$a_k\leqslant\rho(B)\leqslant b_k$,从而得到$s-b_k\leqslant\dfrac{1}{\rho(A^{-1})}\leqslant s-a_k$.

推论3　若A为任意$n\times n$矩阵,且$|A|\equiv[m_{ij}]$ $i,j=1,2,\cdots n$无零行亦无零列,则$\rho(A)\leqslant\max\limits_j\dfrac{\sum\limits_i m_{ij}^{(k+1)}}{\sum\limits_i m_{ij}^{(k)}}$.

证明　因为$\rho(A)\leqslant\rho(|A|)$[1],对$|A|$应用定理1即得证.

2　与其它相关结果的比较

(1) 引理3中给出$\rho(A)$的上下界需要求出非负矩阵A的正特征向量x,操作困难.相比之下,定理1的结果容易计算,因为从引理7,我们知道A^{k+1}的行(列)和能够由A^k的行(列)和递推地算出,且计算工作量不大.

(2) 当k大于2时,定理1较引理2的估计要更精确,事实上,若A无零行及零列,则$A^k(k=1,2,\cdots n)$均无零行及零列,由引理7以及定理1,

$$\rho(A)\leqslant\max_i\frac{\sum\limits_j a_{ij}^{(k+1)}}{\sum\limits_j a_{ij}^{(k)}}=\max_i\frac{\sum\limits_t a_{it}\sum\limits_j a_{tj}^{(k)}}{\sum\limits_t a_{it}\sum\limits_j a_{tj}^{(k-1)}}\leqslant\max_i\frac{\sum\limits_j a_{ij}^{(k)}}{\sum\limits_j a_{ij}^{(k-1)}}\leqslant\cdots\leqslant\max_i\frac{\sum\limits_j a_{ij}^{(2)}}{\sum\limits_j a_{ij}}\leqslant\max_i\sum_j a_{ij};$$

$$\rho(A)\geqslant\min_i\frac{\sum\limits_j a_{ij}^{(k+1)}}{\sum\limits_j a_{ij}^{(k)}}=\min_i\frac{\sum\limits_t a_{it}\sum\limits_j a_{tj}^{(k)}}{\sum\limits_t a_{it}\sum\limits_j a_{tj}^{(k-1)}}\geqslant\min_i\frac{\sum\limits_j a_{ij}^{(k)}}{\sum\limits_j a_{ij}^{(k-1)}}\geqslant\cdots\geqslant\min_i\frac{\sum\limits_j a_{ij}^{(2)}}{\sum\limits_j a_{ij}}\geqslant\min_i\sum_j a_{ij}$$

这两列不等式的最后一个不等式的证明如下:

由

$$\sum_j a_{ij}^{(2)}=\sum_k a_{ik}\Big(\sum_j a_{kj}\Big)\leqslant\Big(\max_k\sum_j a_{kj}\Big)\sum_k a_{ik}$$

可得

$$\frac{\sum\limits_j a_{ij}^{(2)}}{\sum\limits_j a_{ij}}\leqslant\max_i\sum_j a_{ij},\text{从而}\max_i\frac{\sum\limits_j a_{ij}^{(2)}}{\sum\limits_j a_{ij}}\leqslant\max_i\sum_j a_{ij};$$

由

$$\sum_j a_{ij}^{(2)}=\sum_k a_{ik}\Big(\sum_j a_{kj}\Big)\geqslant\Big(\min_k\sum_j a_{kj}\Big)\sum_k a_{ik}$$

可得

$$\min_i\frac{\sum\limits_j a_{ij}^{(2)}}{\sum\limits_j a_{ij}}\geqslant\min_i\sum_j a_{ij}.$$

易见,随着k取值的增大,定理1的界值估计值越来越接近于$\rho(A)$.

(3) 引理1是定理1的特殊情况.从(2)的推导看出,当A的行(列)和为常数时,由定理1即得引理1的结果.

3　非负矩阵分离度的估计

设$n\times n$矩阵A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,$A$的分离度记作$S(A)$,定义为:

$S(A)=\max\limits_{ij}|\lambda_i-\lambda_j|$.当$A$是非负矩阵时,关于$S(A)$的上界有如下估计.

定理2　A是$n\times n$非负矩阵,无零行也无零列,则

$$S(A) \leqslant 2 \max_j \frac{\sum_i a_{ij}^{(k+1)}}{\sum_i a_{ij}^{(k)}}.$$

证明 A 是非负矩阵,由引理4(3),A 的特征值可分成若干组,每组中特征值的模都相等,而且均匀地分布在以原点为心的某一圆周上,故 A 的分离度不超过所有这些圆周中最大圆周的直径,即 $2\rho(A)$. 再由定理1知,

$$S(A) \leqslant 2 \max_j \frac{\sum_i a_{ij}^{(k+1)}}{\sum_i a_{ij}^{(k)}}.$$

[参考文献]

[1] Horn R A, Johnson C R. Matrix Analysis[M]. Cambridge University Press, 1985.

[2] 徐树方. 矩阵计算的理论与方法[M]. 北京:北京大学出版社,1999.

[3] 张谋成,黎稳. 非负矩阵论[M]. 广州:广东高等教育出版社,1995.

[4] Horn R A, Johnson C R. Topics in Matrix Analysis[M]. Cambridge University Press, 1991. Chapter 2.

[5] Marcus M, Minc H. A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities[M]. Boston:Allyn and Bacon INC,1964. Chapter 3.

Bounds on the Spectral Radius and the Spread of Nonnegative Matrix

Tan Xueyuan

(School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, 210097, Nanjing, PRC)

Abstract:In this paper, we give an estimate of the upper and lower bounds on the spectral radius of a nonnegative matrix and compare the bounds with related those in other literatures. Moreover, we give the bounds for the inverse of a nonsingular M-matrix and the upper bound for an arbitary complex matrix. In the addition, we give an upper bound for the spread of a nonnegative matrix.

Key words:Nonnegative matrix, M-matrix, spectral radius, spread of a matrix

[责任编辑:陆炳新]