关于车灯线光源优化设计的离散化解法

张燕新,傅士太

(南京师范大学数学与计算机科学学院,210097,南京)

[摘要] 讨论了车灯制造中一个重要的细节问题——车灯线光源的最优化设计.用离散化的方法来求解并且得到了最优长度,并在此基础上用计算机模拟出线光源上每个点经过反射面反射到达测试屏上的反射亮点,然后用 Matlab 画出此反射区域.最后,对该设计规范的合理性进行了分析以及在认为可能的情况之下进行的修改意见.

[关键词] 离散化,C++,Matlab,Maple,Mathematica

[中图分类号]O24, [文献标识码]A, [文章编号]1001-4616(2004)01-0033-04

0 引言

安装在汽车头部的车灯的形状为一旋转抛物面,车灯的对称轴水平地指向正前方,开口半径 36 mm.经过车灯的焦点,在与对称轴相垂直的水平方向,对称的放置着一定长且均匀分布的线光源,要求在某一设计标准下确定线光源的长度.

该设计标准在简化后可描述如下:在焦点 F 正前方 25 m 处的 A 点放置一测试屏,测试屏与 FA 垂直,用以测试车灯的反射光.在屏上过 A 点处引出一条与地面相平行的直线,在该直线上一点 A 的同侧取点 B 和点 C,使得 $AC = 2AB = 2.6$ m.要求点 C 处的光强度不小于某一额定值(可取为 1 个单位),点 B 处的光强度不小于该额定值的两倍.

在满足该设计规范的条件下,本文先计算线光源的长度,使得线光源的功率最小;对得到的线光源长度,在有标尺的坐标系中画出测试屏上的反射光的反射区域;最后讨论了该设计规范的合理性.

1 问题的假设和简化

(1) 光源所发出的光视为单色光.
(2) 只考虑光线的一次反射,且不计空气对光线的吸收.
(3) 假设线光源是透明的,即不考虑由于线光源的遮挡而产生的光线不能到达测试屏的光线.
(4) 假设线光源是均匀分布的,从而光能也是均匀分布的.
(5) 不考虑车灯反射面的吸收,也不计反射面内层的反射.

2 模型的建立

由光学原理,照度和距离平方成反比,由此来建立数学模型.以毫米为单位,先建立如图 1 所示的坐标系.由题目所给的信息可以求出车灯的反射面方程为:$z = \dfrac{x^2 + y^2}{60}$,焦点坐标为 $F(0,0,15)$,$B(0,1\,300,25\,015)$,$C(0,2\,600,25\,015)$.

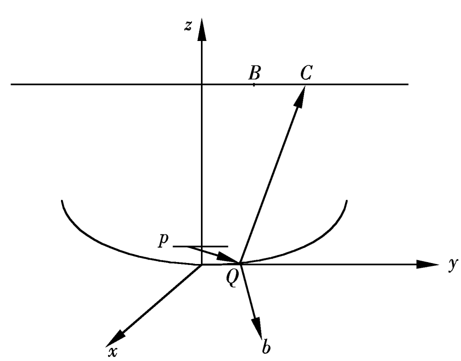

图 1 数学模型图

求线光源上具有单位能量的一点 $P(0,w,15)$ 反射

收稿日期:2003-10-11.
基金项目:南京师范大学《数学建模与数学实验》,181070000802.
作者简介:张燕新,1978-,南京师范大学数学与计算机科学学院研究生.主要从事数学建模与最优化的学习与研究,E-mail:galaxyz@126.com
通讯联系人:傅士太,1962-,南京师范大学数科院数学建模领队.从事数学建模与四元素研究工作,E-mail:stfu@njnu.edu.cn

到 C 点的能量.

设反射点的坐标为 $Q\left(x, y, \frac{x^2+y^2}{60}\right)$. 记入射向量为 $\boldsymbol{a}$, 该点反射面外法线的方向向量为 $\boldsymbol{b}$, 根据几何学知识可以知道反射光线 $\boldsymbol{c}$ 应该满足 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} - \frac{2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b}$. 由 $\boldsymbol{a} = \left(x, y-w, \frac{x^2+y^2}{60} - 15\right)$, $\boldsymbol{b} = (x/30, y/30, -1)$. 从而用 Mathematica 可得 $\boldsymbol{c} = (c_x, c_y, c_z)$ 的表达式为:

$$\begin{cases} c_x = \dfrac{2xyw}{x^2+y^2+900} \\ c_y = \dfrac{w(y^2-x^2-900)}{x^2+y^2+900} \\ c_z = \dfrac{x^4+2x^2(900+y^2)-3\,600wy+(900+y^2)^2}{60(x^2+y^2+900)} \end{cases} \tag{1}$$

但是注意到反射光线要通过 C 点, 所以应有

$$\begin{cases} kc_x = -x \\ kc_y = 2\,600 - y \\ kc_z = 25\,015 - \dfrac{x^2+y^2}{60} \end{cases} \quad \text{(其中 } k \text{ 为待定的常数)} \tag{2}$$

从方程(2)的第一式可以解得 $x = 0$ 或 $k = -\frac{x^2+y^2+900}{2wy}$, 由此可以求得反射光线坐标应满足下面的方程才可以反射到 C 点.

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{-900 + \dfrac{1\,500\,000w}{w-2\,600} - \dfrac{14\,062\,500w^2}{169(w-2\,600)^2}} \\ y = \dfrac{3\,750w}{13(w-2\,600)} \end{cases} \tag{3}$$

或

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^5 - (w+2\,600)y^4 + 1\,800y^3 + (1\,498\,200w - 4\,680\,000)y^2 \\ \quad + (9\,360\,000w + 810\,000)y - 1\,350\,810\,000w - 2\,106\,000\,000 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

注意到在(3)有 $0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 36^2$ 成立的前提下才能使得反射光线一次射到测试屏上, 用 Maple 求此不等式:

```
> eq2 := 300 * (-3 + 5000 * w/(-2600 + w));
> solve(eq2 <= 36 * 36, {w});
```

$$\left\{w < 2\,600, \frac{-475\,800}{124\,817} \leqslant w\right\}$$

```
> solve(eq2 >= 0, {w});
```

$$\left\{w \leqslant \frac{-7\,800}{4\,997}\right\}, \{2\,600 < w\}$$

要同时满足就得到 w 应有 $-\frac{475\,800}{124\,817} \leqslant w \leqslant -\frac{7\,800}{4\,997}$.

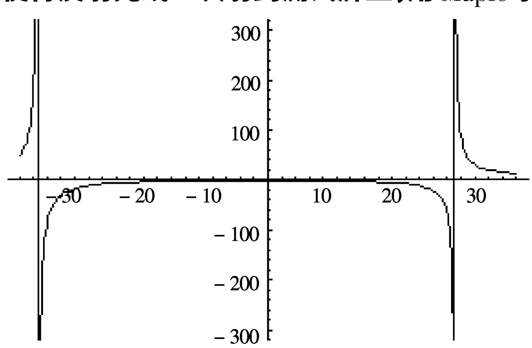

图 2　线光源长度条件

但由于方程(4)为含有未知变量的最高次为 5 次方程, 没有一般公式解, 考虑到 $x = 0$, 所以应有 $0 \leqslant y^2 \leqslant 36^2$. 下面将 w 表示成 y 的函数并且作出 $-36 \leqslant y \leqslant 36$ 的图像, 如图 2.

$$w = \frac{-2\,106\,000\,000 + 810\,000\,y - 4\,680\,000\,y^2 + 1\,800\,y^3 - 2\,600y^4 + y^5}{1\,350\,810\,000 - 9\,360\,000y - 1\,498\,200y^2 + y^4}$$

Plot[w, {y, -36, 36}]

就可以看出 w 在什么范围内变化, 才能得到 $x^2 + y^2 \leqslant 36^2$ $(1\,350\,810\,000 - 9\,360\,000y - 1\,489\,200y^2 + y^4 \neq 0)$. 用求得 w 在 0 附近的最大值: Findminimum[$-w$, {y, 0}] 得到了 {1.55408, {y = -0.978928}}, 即

要有 $w \leqslant -1.55408$($w > 0$ 的部分与 $-\frac{475\,800}{124\,817} \leqslant w \leqslant -\frac{7\,800}{4\,997}$ 相交为空,故舍去.)时才满足上述条件.

由物理光学知道从点 P 发出的光线到达 C 点时具有能量 $W_C = L \times W_P$,其中 $L = \frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta}{[4\pi \mid \boldsymbol{PQ} \mid \cdot \mid \boldsymbol{QC} \mid]^2}$,$\alpha$,$\beta$ 分别为入射光线 $\boldsymbol{a}$ 和反射光线 $\boldsymbol{c}$ 与 Z 轴的夹角,

即 $\cos\alpha = \frac{r^2/60}{\mid \boldsymbol{PQ} \mid}$,$\cos\beta = \frac{25015 - r^2/60}{\mid \boldsymbol{QC} \mid}$,其中 $r^2 = x^2 + y^2$.

同理可以求得反射光线到达 B 点反射点 Q 应满足的方程为:

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{-900 + \dfrac{1\,500\,000w}{w - 1\,300} - \dfrac{56\,250\,000w^2}{169(w - 1\,300)^2}} \\ y = \dfrac{7\,500w}{13(w - 1\,300)} \end{cases} \tag{5}$$

或

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^5 - (w + 1\,300)y^4 + 1\,800y^3 + (1\,498\,200w - 2\,340\,000)y^2 \\ + (4\,680\,000w + 810\,000)y - 1\,350\,810\,000w - 1\,053\,000\,000 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

为了保证上式有 $0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 36^2$ 的解,(5)与(6)式中的 w 分别应该满足 $-\frac{237\,900}{124817} \leqslant w \leqslant -\frac{3\,900}{4\,997}$ 和 $w \leqslant -0.779\,108$.

3 模型的求解

从上述模型建立的过程来看,由于方程组(4)和(6)均为含有未知变量的 5 次方程,没有一般的公式解,所以只能考虑用离散化的方法来求解.其基本思想如下:

在反射光线可以反射到 B 点和 C 点的线光源长度内,即 B 点在[$-1.90\,599$,$-0.780\,572$],C 点在[$-3.81\,198$,$-1.56\,099$]的范围内.先用 Mathematica 求得点光源能反射到 B 和 C 点所对应的反射点 Q 的坐标.然后用 C++ 求得满足 B 点光强为 C 点两倍所对应的线光源的长度,所得最优长度为 3.571 98 mm,B 点光强与 C 点光强之比为:1.999 82.

4 反射光亮区的计算

将线光源和车灯反射面离散化为点光源和反射面元,分别计算每一点光源关于每一面元的反射光线.判断此反射光是否与车灯的反射面相交,若相交,则说明了此光线不能一次到达测试屏,否则就求出反射光线与测试屏的交点,即为反射区域内的一点.所有这些点的集合就构成了反射区域.

最后用 Matlab 6 画出如图 3 所示的反射区域.

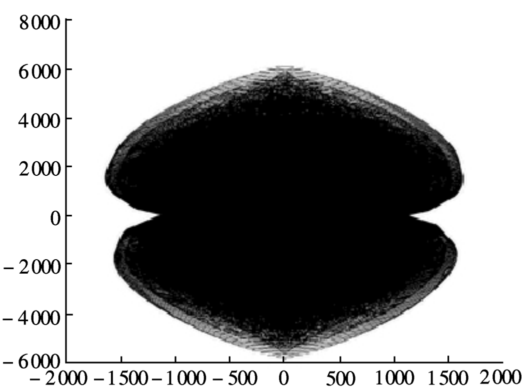

图 3 反射区域图

5 合理性讨论

从上述计算结果以及反射区域图像的分析可知,本题结果基本上与要求相吻合.但由于问题考虑上的某些局限,以及计算精度上可能出现的问题,偏差是一定存在的.求解最优化长度时,由于方程为含有未知变量的高次方程,所以进行直接的积分行不通,只好采取了离散化处理.在反射区域的计算机模拟时对其中每条可能的出射线作出几何上的判断,把不符合题意的多次反射光线排除在外.

当然,本模型还有一些不足和需要改进之处.首先不妨突破题目的限制考虑多次反射情况;其次光线在反射过程中能量的损失可以进行考虑;第三可以考虑线光源不是透明的情况等等.

致谢:感谢陈务深老师,他为本文的撰写提供了许多非常有用的资料.

[参考文献]

[1] Harvey M Deitel,Paul James Deitel. C++ 大学教程[M]. 北京:电子工业出版社,2001.
[2] 姜启源.数学模型[M]. 北京:高等教育出版社,1983.8.
[3] 刘元高.Mathematica 4.0 实用教程[M]. 北京:国防工业出版社,2000.
[4] 刘辉,李海.MAPLE 符号处理及应用[M]. 北京:国防工业出版社,2001.
[5] 楼顺天.Matlab 5.x 与程序设计[M]. 西安:西安电子科技大学出版社,2000.
[6] 王沫然.Matlab 6.0 与科学计算[M]. 北京:电子工业出版社,2001.
[7] 杨文茂.空间解析几何[M]. 武汉:武汉大学出版社,1997.
[8] 叶其孝.大学生数学建模竞赛辅导教材(1~3)[M]. 湖南:湖南教育出版社,1998.4.
[9] 以谟.应用光学(上册)[M]. 北京:机械工业出版社,1982.
[10] 朱道元. 数学建模精品案例[M]. 南京:东南大学出版社,1998.

The Discrimination Method to Optimization Design of Light Line Illumination

Zhang Yanxin,Fu Shitai

(School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, 210097, Nanjing, PRC)

Abstract: In this paper, we discuss an important problem of vehicle manipulation the optimization design of light illumination. Using discrimination method, we get the optimization length. On the basis of this result, we simulate the reflection point on the test screen, which is the reflection of the light line illumination. Then draw the area of the whole reflection points by Matlab. Finally,we analysis the feasibility of the model and give the suggestion to the modification of the model.

Key words: Discrimination,C++,Matlab,Mathematica,Maple

[责任编辑:陆炳新]

(上接第32页)

[References]

[1] Xu Aiqing. *G*-design of six points and seven edges[J]. Journal of Nanjing Normal Uiversity, 2003,26:23—29.
[2] Xu Aiqing. *G*-design with six vertices and seven deges[J]. to appear.
[3] Bermond J C, Huang C, Rose A, *et al*. Decomposition of complete graphs into isomorphic subgraphs with five vertices[J]. ARS Combinatoria, 1980,10:293—318.
[4] Bermond J C, Schönheim J. *G*-decomposition of K_n, where G has four vertices of less[J]. Discrete Math, 1977,19:113—120.
[5] Hanani H. Balanced incomplete block designs[J]. Discrete Math, 1975,11:255—369.
[6] Yin Jianxing, Gong Busheng. Existence of *G*-design with $|v(G)|=6$[J]. Combinatoria Designs and Applications, 1998,126:201—218.
[7] Tian Zihong, Kang Qingde. $K_{2,3}+e$-design of λK_v[J]. Journal of Hebei Normal University, 2002,26:12—17.

关于六点八边图的图设计

刘重阳

(南京师范大学数学与计算机科学学院,210097,南京)

[摘要]　设 K_v 是一个 v 点的完全图. G 为一个不含孤立点的简单图. K_v 的一个 G-设计,常记为 $(v,G_i,1)-GD$,是指一个二元组 (X,B),其中 X 为 K_v 的顶点集,B 是 K_v 的一些子图(亦称为区组)构成的集合,使得每一个区组与 G 同构,且 K_v 的任何一条边恰在 B 的一个区组中出现.本文讨论了三类六点八边图 $(v,G_i,1)-GD$ $(i=1,2,3)$ 的图设计存在问题,即 $(v,G_i,1)-GD$ $(i=1,2,3)$ 存在的充要条件是 $v\equiv 0,1 \bmod (16)$ 且 $v\geqslant 16$.

[关键词]　图设计,带洞图设计,PBD-闭集

[责任编辑:陆炳新]