星系团相关函数的标度关系

沈卫华,张航

(南京师范大学物理科学与技术学院,210097,南京)

[摘要] 利用描述引力系统演化的伏拉索夫方程的标度关系探讨了宇宙中星系团分布的一些标度律,并结合一个宇宙加速模型进行了讨论.发现,若宇宙膨胀因子 $a \propto t^{1.3}$,则能很好地解释观测到的星系团相关的标度律.

[关键词] 星系团,两点相关函数,宇宙加速膨胀

[中图分类号]P157.8, [文献标识码]A, [文章编号]1001-4616(2004)01-0041-04

0 引言

宇宙中,星系聚集形成星系团,而星系团聚集形成超星系团.对这种大量自由度的引力系统往往进行统计性的研究,其中最重要的方法是相关函数的研究,星系的两点相关函数是 $\xi_g = (r_{0g}/r)^{\gamma}$,其中 $\gamma = 1.8$, $r_{0g} = (5.4 \pm 1)h^{-1}\mathrm{Mpc}$[1].星系团具有相同幂指数 γ 的两点相关函数形式 ξ_c,虽然振幅并不一样.同时,人们还发现不同类型星系团的相关函数的振幅也是不同的,存在以下两种关系[2]:(1) 与星系团的富度(richness) 的标度关系;(2) 与星系团的密度的标度关系.如果把 i 种星系团的相关函数描述如下:$\xi_i(r) = A_i r^{-1.8}$,那么这些关系可写为:$A_i \propto N_i$ 和 $A_i \propto n_i^{-\gamma/3}$,其中 N_i 是 i 种星系团的富度,n_i 是星系团的数密度.

在本文中,我们将在文献[3] 的研究方法的基础上,对更为现实的物理坐标而不是共动坐标作对应的变换,得到一个新的标度关系,并结合宇宙加速膨胀模型进行讨论,从而解释了以上观察到的星系团相关函数的标度关系.

1 引力伏拉索夫方程的标度变换

冷暗物质宇宙模型中,宇宙大尺度结构的形成被认为是从下到上的,星系成团是级联式的,因此,在考虑某一级别的星系团系统时,可以近似地认为作为背景的场星系和低级别的团是统计均匀地分布的,这样的背景场对所考虑的星系团系统的引力作用可以忽略.由此,某一级别的星系团系统(该系统中粒子质量假设为 m_c) 可用无碰的伏拉索夫方程描述如下[1]:

$$\frac{\partial}{\partial t}f_c + \frac{p_c^i}{m_c a^2}\frac{\partial f_c}{\partial x_c^i} - m_c \frac{\partial \phi_c}{\partial x_c^i}\frac{\partial f_c}{\partial p_c^i} = 0 \tag{1}$$

$$\nabla^2 \phi_c = 4\pi G m_c a^{-1}\int f_c \mathrm{d}^3 p_c \tag{2}$$

$$\boldsymbol{r}_c = a\boldsymbol{x}_c, \boldsymbol{p}_c = m_c a \boldsymbol{v}_c \tag{3}$$

其中 $f_c = f_c(\boldsymbol{x}_c, \boldsymbol{p}_c, t)$ 是星系团的分布函数,$\boldsymbol{v}_c$ 是本动速度,a 是宇宙膨胀因子,$\boldsymbol{x}_c$ 是共动坐标.

我们采用统计力学中重整化群(RG) 的思想来研究上面的伏拉索夫方程.重整化群方法分为两步[4],第一步是粗粒化(coarse graining),而由星系组成的星系团正好可以看成是星系的粗粒近似.第二步是重新标度(rescaling),使粗粒化的系统与原始系统相类似.在这里,我们所做的便是这第二步,即将星系团系统进行重新标度,使得描述星系团系统的伏拉索夫方程与描述未粗粒化的星系系统演化的伏拉索夫方程相

收稿日期:2003-04-29.

基金项目:国家自然科学基金资助(10103002).

作者简介:沈卫华,1978 – ,南京师范大学物理科学与技术学院硕士研究生,主要从事天体物理的学习与研究,E – mail:weihau_sunny@163.com

通讯联系人:张航,1967 – ,南京师范大学物理科学与技术学院副教授.主要从事天体物理的研究,E – mail:hang_chang@email.njnu.edu.cn

匹配.

粗粒近似后的星系团系统的演化方程已在上面写出,星系系统伏拉索夫方程如下:

$$\frac{\partial}{\partial t}f_g + \frac{p_g^i}{m_g a^2}\frac{\partial f_g}{\partial x_g^i} - m_g\frac{\partial \phi_g}{\partial x_g^i}\frac{\partial f_g}{\partial p_g^i} = 0 \tag{4}$$

$$\nabla^2\phi_g = 4\pi G m_g a^{-1}\int f_g \mathrm{d}^3 p_g \tag{5}$$

$$\boldsymbol{r}_g = a\boldsymbol{x}_g, \boldsymbol{p}_g = m_g a\boldsymbol{v}_g \tag{6}$$

其中 $f_g = f_g(\boldsymbol{x}_g, \boldsymbol{p}_g, t)$ 是星系的单粒子分布函数, v_g 是本动速度, x_g 是共动坐标,星系粒子质量被认为是 m_g.

假设粗粒系统中的粒子(星系团)由 N 个星系组成,因而有 $m_c = Nm_g$. 星系团系统和星系系统都是由平方反比引力控制的,不同于粒子质量和尺度. 下面我们进行标度变换,目的是使粗粒(星系团)系统变换后回到原来(星系)系统.

首先,如上给出的,粒子的质量变换为

$$m_c = Nm_c' = Nm_g \tag{7}$$

然后,长度也要进行标度变换. 我们假设星系中只有 η 部分形成星系团,则星系和星系团的平均距离之间的联系为 $d_c = \eta^{-1/3}N^{1/3}d_g$. 这样,我们把位置坐标变换为

$$\boldsymbol{r}_c = \eta^{-1/3}N^{1/3}\boldsymbol{r}_c' \tag{8}$$

星系团和星系的典型速度也是不一样的,因此引入典型共动速度的变换

$$\boldsymbol{v}_c = \lambda\boldsymbol{v}'_c \tag{9}$$

其中 λ 为某一标度变换因子.

在作了以上的标度变换后,星系团系统就可以与星系系统在几何上相比较了. 为了使两者能在动力学上相似,其他相关量也要进行标度变换. 既然质量和尺度对星系团和星系来说不一样,那么演化的时标也不同,要进行标度变换

$$t = N^{\alpha}t' \tag{10}$$

相应的有

$$a = N^{\varepsilon}a' \tag{11}$$

并且假设 $f_c = N^{\beta}f'_c$, $\phi_c = N^{\delta}\phi'_c$. α, β, γ 和 δ 为待定参数.

把以上标度变换代入(4)和(5),得:

$$N^{-\alpha+\beta}\frac{\partial}{\partial t'}f'_c + \lambda\eta^{1/3}N^{\beta-1/3}\frac{p'^i_c}{m_g a'^2}\frac{\partial f'_c}{\partial x'^i_c} - \lambda^{-1}\eta^{1/3}N^{\delta+\beta-1/3}m_g\frac{\partial\phi'_c}{\partial x'^i_c}\frac{\partial f'_c}{\partial p'^i_c} = 0 \tag{12}$$

$$\eta^{2/3}N^{2\varepsilon-2/3+\delta}\nabla'^2\phi'_c = \lambda^3 N^{4+\beta+2\varepsilon}4\pi G m_g a'^{-1}\int f'_c \mathrm{d}p'_c \tag{13}$$

可以看出,当

$$N^{-\alpha+\beta} = \lambda\eta^{1/3}N^{\beta-1/3} = \lambda^{-1}\eta^{1/3}N^{\delta+\beta-1/3} \tag{14}$$

$$\eta^{2/3}N^{2\varepsilon-2/3+\delta} = \lambda^3 N^{4+\beta+2\varepsilon} \tag{15}$$

即

$$N^{\alpha} = \lambda^{-1}\eta^{-1/3}N^{1/3}, \quad N^{\beta} = \lambda^{-1}\eta^{2/3}N^{-14/3} \tag{16}$$

方程变为

$$\frac{\partial}{\partial t'}f'_c + \frac{p'^i_c}{m_g a'^2}\frac{\partial f'_c}{\partial x'^i_c} - m_g\frac{\partial\phi'_c}{\partial x'^i_c}\frac{\partial f'_c}{\partial p'^i_c} = 0 \tag{17}$$

$$\nabla'^2\phi'_c = 4\pi G m_g a'^{-1}\int f'_c \mathrm{d}p'_c \tag{18}$$

这是一个描述星系系统的伏拉索夫方程.

通过以上的变换,所考虑的星系团系统与某个星系系统在几何与动力学上都相同了. 如果最后的演化与初始条件无关[5],则(4)和(17)的渐近解相同,即

$$f'_c(\boldsymbol{x}'_c, \boldsymbol{p}'_c, t') = f_g(\boldsymbol{x}'_c, \boldsymbol{p}'_c, t') \tag{19}$$

2　两点相关函数的振幅关系

星系两点相关函数 $\xi(r)$ 定义[1]：

$$1 + \xi_g(x_{g,12}, t) = \frac{1}{{n_g}^2 a^6}\int < f_g(\boldsymbol{x}_{g1}, \boldsymbol{p}_{g1}, t) f_g(\boldsymbol{x}_{g2}, \boldsymbol{p}_{g2}, t) > \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{g1}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{g2} \tag{20}$$

其中 n_g 是星系平均数密度，类似的，星系团的两点相关函数为

$$1 + \xi_c(x_{c,12}, t) = \frac{1}{{n_c}^2 a^6}\int < f_c(\boldsymbol{x}_{c1}, \boldsymbol{p}_{c1}, t) f_c(\boldsymbol{x}_{c2}, \boldsymbol{p}_{c2}, t) > \mathrm{d}\boldsymbol{p}_{c1}\mathrm{d}\boldsymbol{p}_{c2} \tag{21}$$

其中 n_c 是星系团平均数密度，利用第一节的结果以及质量守恒 $n_c(t)a^3 = n_c(t')a'^3$ 和 $Nn_c(t') = \eta n_g(t')$，得到

$$\begin{aligned}
1 + \xi_c(x_{c,12}, t) &= \frac{1}{{n_c}^2(t) a^6}\eta^{4/3}\lambda^4 N^{-10/3+6\varepsilon}\int < f'_c(\boldsymbol{x}'_{c1}, \boldsymbol{p}'_{c1}, t) f'_c(\boldsymbol{x}'_{c2}, \boldsymbol{p}'_{c2}, t) > \mathrm{d}\boldsymbol{p}'_{c1}\mathrm{d}\boldsymbol{p}'_{c2} \\
&= \frac{1}{{n_c}^2(t') a'^6}\eta^{4/3}\lambda^4 N^{-10/3+6\varepsilon}\int < f_g(\boldsymbol{x}'_{c1}, \boldsymbol{p}'_{c1}, t) f_g(\boldsymbol{x}'_{c2}, \boldsymbol{p}'_{c2}, t) > \mathrm{d}\boldsymbol{p}'_{c1}\mathrm{d}\boldsymbol{p}'_{c2} \\
&= \eta^{-2/3}\lambda^4 N^{-4/3+6\varepsilon}\frac{1}{{n_c}^2(t') a'^6}\int < f_g(\boldsymbol{x}'_{c1}, \boldsymbol{p}'_{c1}, t) f_g(\boldsymbol{x}'_{c2}, \boldsymbol{p}'_{c2}, t) > \mathrm{d}\boldsymbol{p}'_{c1}\mathrm{d}\boldsymbol{p}'_{c2} \\
&= \eta^{-2/3}\lambda^4 N^{-4/3+6\varepsilon}[1 + \xi_g(\boldsymbol{x}'_{c,12}, t')]
\end{aligned} \tag{22}$$

又由对粒子数守恒有 $\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{ax^2}\frac{\partial}{\partial x}[x^2(1+\xi)v] = 0$[1]，其中 v 是 x 处物质的平均共动速度，定义 $h = -v/ax$，并假设 h 为常量，则以上方程的解[1] 为 $1 + \xi = a^{3h}F(a^h x)$．在强非线性阶段，$h \approx 1(\xi \gg 200)$，在中等非线性阶段，$h \approx 2(1 \leqslant \xi \leqslant 200)$[6,7]．根据两点相关函数的观测结论 $\xi \propto 1/x^\gamma$ 和以上的公式，我们得到 $\xi(x,t) \propto a^{(3-\gamma)h}/x^\gamma$．又若宇宙膨胀因子 $a \propto t^x$，那么从 $t = N^\alpha t'$，我们得到 $a = N^{\alpha x}a'$，因此 $N^\varepsilon = \eta^{-x/3}\lambda^{-x}N^{x/3}$．将这些结论代入(22) 得到

$$\frac{A_c}{A_g} = \eta^{-2/3-\gamma/3-x+(3-\gamma)(h-1)x/3}\lambda^{4-3x+(3-\gamma)(h-1)x/3}N^{\gamma/3-4/3+x-(3-\gamma)(h-1)x/3} \tag{23}$$

其中 A_c 和 A_g 分别是所考虑的星系团系统和星系系统的两点相关函数的振幅．

3　标度关系与宇宙加速膨胀

下面将对(23) 式作进一步讨论．假设构成所含个数为 N 的星系团的星系初始速度带有一定的随机性，则根据动量守恒以及中心极限定理，有 $v^2 = N^{-1}v'^2$，故 $\lambda = N^{-1/2}$．另外很显然 $\eta \propto nN$．于是，由(23) 式我们得到：

$$A \propto n^{-2/3-\gamma/3-x+(3-\gamma)(h-1)x/3}N^{-4+3x/2-(3-\gamma)(h-1)x/6} \tag{24}$$

事实上，此处的 n 应该是指在富度为 N 级别阶段而更高级别的团尚未形成时该级别星系团的数目．若现在宇宙中富度为 N 的团的密度为 n_N，则公式(24) 中 n 可近似地用所有的富度等于和大于 N 的团的密度来近似，即 $n \approx n_{\geqslant N}$，这正是 Bahcall 和 West 结论[2] 中所指的团的密度，而且实际上两者与 N 的幂律关系是相同的．理论上有 $n_N \propto N^{-\tau}$，其中 $\tau = (29-9\gamma)/(12-4\gamma)$[8]，从而，$n \propto N^{-(\tau-1)}$，当 $\gamma = 1.8$ 时 $\tau - 1 = 3/\gamma \approx 1.67$．我们得到：

$$A \propto N^{-17/9-2(h-1)x/3+5x/3+3x/2-(h-1)x/5} \tag{25}$$

星系团的成团过程可以看成是处于中等非线性阶段，故 $h \approx 2$，这样，若 $A \propto N$，则由(25) 给出 $x \approx 1.3$，亦即 $a \propto t^{1.3}$，对应着加速膨胀的宇宙．而根据关系 $n \propto N^{-(\tau-1)}$，若 $A \propto N$，则 $A \propto n^{-\gamma/3}$．因此，我们的结论是，如果宇宙膨胀因子 $a \propto t^{1.3}$，那么从理论上完全能够解释所观测到的星系团的两个标度关系：$A \propto N$ 和 $A \propto n^{-\gamma/3}$．

一般认为，某种“真空”能量导致宇宙加速膨胀．Quintessence 被认为是一种真空能量成份[9]，它是由某种标量场 Q 在其自相互作用势 $V(Q)$ 中缓慢变化产生的．这种 Q 能量的物态方程为 $P_Q = w_Q\rho_Q$，其中 w_Q 可

近似地看成一常数,范围在 -1 与 0 之间,具体的值依赖于 $V(Q)$,即 $w_Q=\frac{-2(\Gamma-1)}{1+2(\Gamma-1)}$,其中 $\Gamma\equiv V''V/(V'^2)$[9],由于这种 Q 能量随着宇宙膨胀的密度减少比物质减少要慢,因此可认为现在的宇宙这种 Q 能量占优,这样 $a\propto t^{2/3(1+w_Q)}$.当 $a\propto t^{1.3}$ 时,$w_Q=-0.5$,即 $\Gamma=1.5$.而 $\Gamma\equiv V''V/(V'^2)$,是对标量场 Q 自相互作用势的一种限制,这样,依据我们的结论,就对 Γ 提出了更为具体的限制,从而有利于进一步研究的展开.

4 结论

通过对引力伏拉索夫方程的标度变换,我们得到了星系团两点相关函数振幅的一个新的标度关系,并进而得到了如下的结论:宇宙是加速膨胀的,其膨胀因子 $a\propto t^{1.3}$,当然,据我们所知,目前在观测上对膨胀因子与 t 的指数关系还未确定,有待于实验的进一步验证.根据我们的引力成团模型,从理论上可以推导出观测到的星系团两点相关函数振幅的两个标度关系:$A\propto N$ 和 $A\propto n^{-\gamma/3}$.我们理论所要求的膨胀因子与某种宇宙加速膨胀模型相符,而且,据我们的结果对标量场 Q 的自相互作用势提出了具体的限制.

[参考文献]

[1] Peebles P J E. The Large Scale Structure of the Universe[M]. Princeton Univ Press, 1980.
[2] Bahcall N A, West M J. The Cluster Correlation Function – Consistent Fesults from an Automated Survey[J]. ApJ, 1992, 392:419.
[3] Zhang H, Li X Q. Scaling Argument for the Amplitudes of Clustering Correlation Functions[J]. ApJ, 2000, 535:24.
[4] Fisher M E. Renormalization Group Theory: Its Basis and Formulation in Statistical[J]. Physics Rev Mod Phys, 1998, 70:653.
[5] Melott A L, Shandarin S F. Controlled Experiments in Cosmological Gravitational Clustering[J]. ApJ, 1993, 410:469.
[6] Hamilton A J S, Kumer P, Lu E, *et al*. Reconstructing the Primordial Spectrum of Fluctuations of the Universe from the Observed Nonlinear Clustering of Galaxies[J]. ApJ, 1991, 374:L1.
[7] Padmanabhan T, Engineer S. Nonlinear Gravitational Clustering: Dreams of a Paradigm[J]. ApJ, 1998, 493:509.
[8] Zhang H, Li X Q. Scaling Law of Exponents in Cosmological Clustering[J]. Chin Phys Lett, 2002, 19:280.
[9] Steinhardt P J, Wang L, Zlatev I. Cosmological TrackingSolutions[J]. Phys Rev D, 1999, 59:123504.

Scaling Argument for the Cluster Correlation Functions

Shen Weihua, Zhang Hang

(School of Physical Science and Technology, Nanjing Normal University, 210097, Nanjing, PRC)

Abstract: A new scaling analysis to the Vlasov equation which describes gravitational clustering is performed, and then it is argued with universe accelerative expanse modal. It is found that, if the cosmological scale factor $a\propto t^{1.3}$, the observed cluster correlation functions' scaling law can be well explained.

Key words: Cluster, two point correlation function, universe accelerative expanse

[责任编辑:丁蓉]