关于 Wronskian 行列式亏量和的 Ozawa 问题

雷春林

(南京师范大学数学与计算机科学学院,210097,江苏,南京)

[摘要]　若 $f(z)$ 为有限级 λ 的亚纯函数,$a_1,a_2\cdots,a_n$ 为 $f(z)$ 的 n 个线性无关的小函数,$L(f)=W(a_1,a_2,\cdots,a_n,f)$ 为 $f(z)$ 的 Wronskian 行列式,$T(r,f)=O(T(r,L(f)))$,σ_λ 表示有限级 λ 的亚纯函数的集合,

$$K(\lambda)=\inf_{f\in\sigma_\lambda}\varlimsup_{r\to\infty}\frac{N\left(r,\frac{1}{f}\right)+N(r,f)}{T(r,f)}.$$

则存在只与 n,λ 有关的正常数 d,满足

$$\frac{n}{3n+2}\leqslant d\leqslant\frac{1}{3},$$

使得 $\sum_{a\in\bar{C}}\delta(a,L(f))\leqslant 2-dK(\lambda)$.

[关键词]　亚纯函数,亏量,Wronskian 行列式,级

[中图分类号]O174.5,　[文献标识码]A,　[文章编号]1001-4616(2004)03-0030-06

0　引言与主要结果

设 $f(z)$ 为开平面中的有限级 λ 的亚纯函数,令 $K(f)=\varlimsup_{r\to\infty}\dfrac{N\left(r,\frac{1}{f}\right)+N(r,f)}{T(r,f)}$,$\sigma_\lambda$ 表示有限级 λ 的亚纯函数集,令 $K(\lambda)=\inf_{f\in\sigma_\lambda}K(f)$. R.Nenanlinna[1] 曾证明,当 λ 是正的非整数时,必有 $K(\lambda)>0$.

考虑 f' 的亏量和,Ozawa[2] 证明了

定理 A　若 $f(z)$ 为有限级 λ 的亚纯函数,则存在正常数 d,满足 $\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}\leqslant d\leqslant\dfrac{1}{4}$,使得 $\sum_{a\in C}\delta(a,f')\leqslant 2-dK(\lambda)$.

詹小平改进了定理 A,证明了:

定理 B[3]　若 $f(z)$ 为有限级 λ 的亚纯函数,则存在正常数 d,满足 $\dfrac{1}{4}\leqslant d\leqslant\dfrac{4}{13}$,使得 $\sum_{a\in C}\delta(a,f')\leqslant 2-dK(\lambda)$.

詹小平进一步证明了:

定理 C[4]　若 $f(z)$ 为有限级 λ 的亚纯函数,则对任意自然数 n,存在只与 n,λ 有关的正常数 d,满足

$$\frac{2n(n+1)}{4n^2+7n+2}\leqslant d\leqslant\frac{4n(n+1)}{4n^2+6n+1+\sqrt{16n^4+56n^3+60n^2+20n+1}}$$

使得 $\sum_{a\in C}\delta(a,f^{(n)})\leqslant 2-dK(\lambda)$.

本文我们证明了:

定理 1　若 $f(z)$ 为有限级 λ 的亚纯函数,$a_1,a_2\cdots,a_n$ 为 $f(z)$ 的 n 个线性无关的小函数,$L(f)=W(a_1,a_2,\cdots,a_n,f)$ 为 $f(z)$ 的 Wronskian 行列式,$T(r,f)=O(T(r,L(f)))$,则存在只与 n,λ 有关的正常数 d,满足

$$\frac{n}{3n+2}\leqslant d\leqslant\frac{1}{3}\tag{1}$$

收稿日期:2004-03-01.
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10071038).
作者简介:雷春林,1976-,南京师范大学数学与计算机科学学院硕士研究生,华南农业大学理学院应用数学系教师,主要从事函数论的学习与研究.

使得 $\sum_{a\in C}\delta(a,L(f))\leqslant 2-dK(\lambda)$.

推论 $f(z)$ 为有限级 λ 的亚纯函数,$L(f)$ 如定理 1 所定义,若 $\sum_{a\in C}\delta(a,L(f))=2$,则 λ 必为正整数.

定理 2 若 $f(z)$ 为有限级 λ 的亚纯函数,n,k 为任意正整数,则存在只与 n,λ 有关的正常数 d,满足

$$\frac{(n+k)}{2(n+k+1)}\leqslant d\leqslant\frac{1}{2} \tag{2}$$

使得 $\sum_{a\in C}\delta(a,f^kf^{(n)})\leqslant 2-dK(\lambda)$.

1 定理的证明

引理 1[8] 若 $f(z)$ 为 $|z|<\infty$ 内的非常数亚纯函数,k 为一正整数,$a_1,a_2,\cdots,a_q$ 为 $q(\geqslant 2)$ 个不同的复数,则

$$\sum_{i=1}^{q}m\left(r,\frac{1}{f-a_i}\right)\leqslant m\left(r,\frac{1}{f^{(k)}}\right)+S(r,f).$$

定理 1 的证明 若不存在正常数 d 使

$$\sum_{a\in C}\delta(a,L(f))\leqslant 2-dK(\lambda). \tag{3}$$

成立,则存在亚纯函数 $f(z)$ 使得

$$\sum_{a\neq\infty}\delta(a,L(f))>2-dK(\lambda)-\delta(\infty,L(f)). \tag{4}$$

又因为 $\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{L(f)-a_j}=\frac{1}{(L(f))'}\sum_{j=1}^{q}\frac{(L(f))'}{L(f)-a_j}$,$a_j$ 为有限常数.

于是有

$$\begin{aligned}m\left(r,\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{L(f)-a_j}\right)&\leqslant m\left(r,\frac{1}{(L(f))'}\right)+m\left(r,\sum_{j=1}^{q}\frac{(L(f))'}{L(f)-a_j}\right)\\&\leqslant T(r,L(f))+\overline{N}(r,L(f))-N\left(r,\frac{1}{(L(f))'}\right)+S(r,L(f)).\end{aligned}$$

而 $m\left(r,\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{L(f)-a_j}\right)=\sum_{j=1}^{q}m\left(r,\frac{1}{L(f)-a_j}\right)+O(1)$,

所以有

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{q}m\left(r,\frac{1}{L(f)-a_j}\right)&\leqslant T(r,(L(f))')-N\left(r,\frac{1}{(L(f))'}\right)+S(r,L(f))\\&\leqslant T(r,L(f))+\overline{N}(r,L(f))-N\left(r,\frac{1}{(L(f))'}\right)+S(r,L(f)).\end{aligned} \tag{5}$$

而

$$\frac{\sum_{j=1}^{q}m\left(r,\frac{1}{L(f)-a_j}\right)}{T(r,L(f))}\leqslant\frac{T(r,(L(f))')}{T(r,L(f))}\left[1-\frac{N\left(r,\frac{1}{(L(f))'}\right)}{T(r,(L(f))')}\right]+\frac{S(r,L(f))}{T(r,L(f))},$$

故有

$$\sum_{j=1}^{q}\delta(a_j,L(f))\leqslant\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{T(r,(L(f))')}{T(r,L(f))}\ \underline{\lim_{r\to\infty}}\left[1-\frac{N\left(r,\frac{1}{(L(f))'}\right)}{T(r,(L(f))')}\right]. \tag{6}$$

又因为 $T(r,L(f))=O(T(r,f))$,故有

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{T(r,(L(f))')}{T(r,L(f))}\leqslant\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{T(r,L(f))+\overline{N}(r,L(f))}{T(r,L(f))}\leqslant 1+\frac{1}{n+1}[1-\delta(\infty,L(f))] \tag{7}$$

由(6)及(7)得

$$\sum_{a\neq\infty}\delta(a,L(f))\leqslant\left[1+\frac{1}{n+1}(1-\delta(\infty,L(f)))\right]\delta(0,(L(f))'). \tag{8}$$

由(4)及(8)得

$$2-dK(\lambda)-\delta(\infty,L(f))<\sum_{a\neq\infty}\delta(a,L(f))\leqslant 1+\frac{1}{n+1}[1-\delta(\infty,L(f))],$$

所以有

$$1-\delta(\infty,L(f))<\frac{n+1}{n}dK(\lambda).\tag{9}$$

又
$$\frac{N(r,(L(f))')}{N(r,L(f))}=\frac{N(r,L(f))+\overline{N}(r,L(f))}{N(r,L(f))}\leqslant 2,$$

由(4)及(6)得

$$1-\delta(\infty,(L(f))')=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N(r,(L(f))')}{T(r,(L(f))')}\leqslant\frac{2\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{N(r,L(f))}{T(r,L(f))}}{\underline{\lim\limits_{r\to\infty}}\dfrac{T(r,(L(f)')}{T(r,L(f))}}$$
$$\leqslant\frac{2(1-\delta(\infty,L(f)))}{\sum\limits_{a\neq\infty}\delta(a,L(f))}\leqslant\frac{2(1-\delta(\infty,L(f)))}{2-dK(\lambda)-\delta(\infty,L(f))}.\tag{10}$$

令 $\varphi(x)=\frac{x}{A+x}$,$(A=1-dK(\lambda)\geqslant 0)$ 而 $\varphi'(x)=\frac{A}{(A+x)^2}\geqslant 0$,

故 $\varphi(x)$ 单调递增.由(9)及(10)得

$$1-\delta(\infty,(L(f))')<\frac{\dfrac{2(n+1)}{n}dK(\lambda)}{1-dK(\lambda)+\dfrac{n+1}{n}dK(\lambda)}=\frac{2(n+1)dK(\lambda)}{n+dK(\lambda)}.\tag{11}$$

由(4)及(8)得

$$2-dK(\lambda)-\delta(\infty,L(f))<\sum_{a\neq\infty}\delta(a,L(f))\leqslant 1+\frac{1}{n+1}[1-\delta(\infty,L(f))]\delta(\infty,(L(f))'),$$

故有

$$\delta(\infty,(L(f))')>\frac{2-dK(\lambda)-\delta(\infty,L(f))}{1+\dfrac{1}{n+1}[1-\delta(\infty,L(f))]},$$

所以有

$$1-\delta(\infty,(L(f))')<1-\frac{2-dK(\lambda)-\delta(\infty,L(f))}{1+\dfrac{1}{n+1}[1-\delta(\infty,L(f))]}.\tag{12}$$

令 $\psi(x)=\frac{A+x}{n+1+x}$,$(A=1-dK(\lambda)\geqslant 0)$ 又 $\psi'(x)=\frac{n+1-A}{(n+1+x)^2}\geqslant 0$,故 $\psi(x)$ 单调递增.由(12)得

$$1-\delta(\infty,(L(f))')<1-(1-dK(\lambda))=dK(\lambda).\tag{13}$$

由(11)及(13)得

$$2-\delta(\infty,(L(f))')-\delta(0,(L(f))')<\frac{2(n+1)dK(\lambda)}{n+dK(\lambda)}+dK(\lambda).\tag{14}$$

令

$$\frac{2(n+1)dK(\lambda)}{n+dK(\lambda)}+dK(\lambda)=K(\lambda).\tag{15}$$

若 $K(\lambda)=0$,则定理已成立.故设 $K(\lambda)>0$,由(15)得

$$d+\frac{2(n+1)d}{n+dK(\lambda)}=1,\tag{16}$$

整理得

$$K(\lambda)d^2+(3n+2-K(\lambda))d-n=0.\tag{17}$$

记(17)的正根为 d,得

$$d=\frac{-(3n+2-K(\lambda))+\sqrt{(3n+2-K(\lambda))^2+4nK(\lambda)}}{2K(\lambda)}>0,$$

代入(14)得

$$2-\delta(\infty,(L(f))')-\delta(0,(L(f))')<K(\lambda),$$

这与 $K(\lambda)$ 的定义矛盾,所以(3)式成立.以下估计 d 的范围.

$$d=\frac{2n}{(3n+2-K(\lambda))+\sqrt{(3n+2-K(\lambda))^2+4nK(\lambda)}}\leqslant\frac{n}{3n+2-K(\lambda)}\leqslant\frac{1}{3},$$

另一面

$$d=\frac{2n}{(3n+2-K(\lambda))+\sqrt{(3n+2)^2-2(n+1)K(\lambda)+(K(\lambda))^2}}\geqslant\frac{2n}{6n+4-K(\lambda)}\geqslant\frac{n}{3n+2},$$

所以定理 1 成立.

定理 2 的证明 若不存在正常数 d 使

$$\sum_{a\in\bar{C}}\delta(a,f^kf^{(n)})\leqslant 2-dK(\lambda).\tag{18}$$

成立,则存在亚纯函数 $f(z)$ 使得

$$\sum_{a\neq\infty}\delta(a,f^kf^{(n)})>2-dK(\lambda)-\delta(\infty,f^kf^{(n)}).\tag{19}$$

又因为 $\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{f^kf^{(n)}-a_j}=\frac{1}{(f^kf^{(n)})'}\sum_{j=1}^{q}\frac{(f^kf^{(n)})'}{f^kf^{(n)}-a_j}$,$a_j$ 为有限常数.

于是有

$$\begin{aligned}m\left(r,\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{f^kf^{(n)}-a_j}\right)&\leqslant m\left(r,\frac{1}{(f^kf^{(n)})'}\right)+m\left(r,\sum_{j=1}^{q}\frac{(f^kf^{(n)})'}{f^kf^{(n)}-a_j}\right)\\&\leqslant T(r,f^kf^{(n)})+\bar{N}(r,f)-N\left(r,\frac{1}{(f^kf^{(n)})'}\right)+S(r,f^kf^{(n)}).\end{aligned}$$

而 $m\left(r,\sum_{j=1}^{q}\frac{1}{f^kf^{(n)}-a_j}\right)=\sum_{j=1}^{q}m\left(r,\frac{1}{f^kf^{(n)}-a_j}\right)+O(1)$,

所以有

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{q}m\left(r,\frac{1}{f^kf^{(n)}-a_j}\right)&\leqslant T(r,(f^kf^{(n)})')-N\left(r,\frac{1}{(f^kf^{(n)})'}\right)+S(r,f^kf^{(n)})\\&\leqslant T(r,f^kf^{(n)})+\bar{N}(r,f)-N\left(r,\frac{1}{(f^kf^{(n)})'}\right)+S(r,f^kf^{(n)}).\end{aligned}\tag{20}$$

而

$$\frac{\sum_{j=1}^{q}m\left(r,\frac{1}{f^kf^{(n)}-a_j}\right)}{T(r,f^kf^{(n)})}\leqslant\frac{T(r,(f^kf^{(n)})')}{T(r,f^kf^{(n)})}\left[1-\frac{N\left(r,\frac{1}{(f^kf^{(n)})'}\right)}{T(r,(f^kf^{(n)})')}\right]+\frac{S(r,f^kf^{(n)})}{T(r,f^kf^{(n)})}$$

故有

$$\sum_{j=1}^{q}\delta(a_j,f^kf^{(n)})\leqslant\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{T(r,(f^kf^{(n)})')}{T(r,f^kf^{(n)})}\ \underline{\lim_{r\to\infty}}\left[1-\frac{N\left(r,\frac{1}{(f^kf^{(n)})'}\right)}{T(r,(f^kf^{(n)})')}\right].\tag{21}$$

又因为

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{T(r,(f^kf^{(n)})')}{T(r,f^kf^{(n)})}&\leqslant\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{T(r,f^kf^{(n)})+\frac{1}{n+k+1}N(r,f^kf^{(n)})+S(r,f^kf^{(n)})}{T(r,f^kf^{(n)})}\\&\leqslant 1+\frac{1}{n+k+1}[1-\delta(\infty,f^kf^{(n)})],\end{aligned}\tag{22}$$

由(21)及(22)得

$$\sum_{a\neq\infty}\delta(a,f^kf^{(n)})\leqslant\left[1+\frac{1}{n+k+1}(1-\delta(\infty,f^kf^{(n)}))\right]\delta(0,(f^kf^{(n)})').\tag{23}$$

由(19)及(23)得

$$2 - dK(\lambda) - \delta(\infty, f^k f^{(n)}) < \sum_{a \neq \infty} \delta(a, f^k f^{(n)}) \leqslant 1 + \frac{1}{n+k+1}[1 - \delta(\infty, f^k f^{(n)})]\delta(\infty, f^k f^{(n)})'), \tag{24}$$

所以有

$$1 - \delta(\infty, f^k f^{(n)}) < \frac{n+k+1}{n+k} dK(\lambda). \tag{25}$$

又

$$\frac{N(r, (f^k f^{(n)})')}{N(r, f^k f^{(n)})} \leqslant \frac{n+k+2}{n+k+1},$$

由(23)得

$$1 - \delta(\infty, (f^k f^{(n)})') = \overline{\lim_{r \to \infty}} \frac{N(r, (f^k f^{(n)})')}{T(r, (f^k f^{(n)})')} = \frac{n+k+2}{n+k+1} \frac{\overline{\lim\limits_{r \to \infty}} \dfrac{N(r, f^k f^{(n)})}{T(r, f^k f^{(n)})}}{\underline{\lim\limits_{r \to \infty}} \dfrac{T(r, (f^k f^{(n)})')}{T(r, f^k f^{(n)})}}$$

$$\leqslant \frac{n+k+2}{n+k+1} \frac{1 - \delta(\infty, f^k f^{(n)})}{\sum\limits_{a \neq \infty} \delta(a, f^k f^{(n)})} \leqslant \frac{n+k+2}{n+k+1} \frac{1 - \delta(\infty, f^k f^{(n)})}{2 - dK(\lambda) - \delta(\infty, f^k f^{(n)})}. \tag{26}$$

令 $\varphi(x) = \frac{x}{A+x}$,$(A = 1 - dK(\lambda) \geqslant 0)$ 而 $\varphi'(x) = \frac{A}{(A+x)^2} \geqslant 0$,故 $\varphi(x)$ 单调递增. 由(25)及(26)得

$$1 - \delta(\infty, (f^k f^{(n)})') < \frac{n+k+2}{n+k+1} \frac{\dfrac{n+k+1}{n+k} dK(\lambda)}{1 - dK(\lambda) + \dfrac{n+k+1}{n+k} dK(\lambda)} = \frac{(n+k+2)dK(\lambda)}{n+k+dK(\lambda)}. \tag{27}$$

由(24)得

$$\delta(\infty, (f^k f^{(n)})') > \frac{2 - dK(\lambda) - \delta(\infty, f^k f^{(n)})}{1 + \dfrac{1}{n+k+1}[1 - \delta(\infty, f^k f^{(n)})]},$$

所以有

$$1 - \delta(\infty, (f^k f^{(n)})') < 1 - \frac{2 - dK(\lambda) - \delta(\infty, f^k f^{(n)})}{1 + \dfrac{1}{n+k+1}[1 - \delta(\infty, f^k f^{(n)})]}. \tag{28}$$

令 $\psi(x) = \frac{A+x}{n+k+1+x}$,$(A = 1 - dK(\lambda) \geqslant 0)$ 又 $\psi'(x) = \frac{n+k+1-A}{(n+k+1+x)^2} \geqslant 0$,故 $\psi(x)$ 单调递增. 由(28)得

$$1 - \delta(\infty, (f^k f^{(n)})') < 1 - (1 - dK(\lambda)) = dK(\lambda). \tag{29}$$

由(27)及(29)得

$$2 - \delta(\infty, (f^k f^{(n)})') - \delta(0, (f^k f^{(n)})') < \frac{(n+k+2)dK(\lambda)}{n+k+dK(\lambda)} + dK(\lambda). \tag{30}$$

令

$$\frac{(n+k+2)dK(\lambda)}{n+k+dK(\lambda)} + dK(\lambda) = K(\lambda). \tag{31}$$

若 $K(\lambda) = 0$,则定理已成立,故设 $K(\lambda) > 0$,由(31)得

$$d + \frac{(n+k+2)d}{n+k+dK(\lambda)} = 1, \tag{32}$$

整理得

$$K(\lambda)d^2 + [2n + 2k + 2 - K(\lambda)]d - (n+k) = 0. \tag{33}$$

记(33)的正根为 d,得

$$d = \frac{-(2n+2k+2-K(\lambda)) + \sqrt{(2n+2k+2-K(\lambda))^2 + 4(n+k)K(\lambda)}}{2K(\lambda)} > 0,$$

代入(30)得

$$2-\delta(\infty,(f^kf^{(n)}L(f))')-\delta(0,(f^kf^{(n)}L(f))')<K(\lambda),$$

这与 $K(\lambda)$ 的定义矛盾,所以(17) 式成立.现估计 d 的范围.

$$d=\frac{2(n+k)}{(2n+2k+2-K(\lambda))+\sqrt{(2n+2k+2-K(\lambda))^2+4(n+k)K(\lambda)}}$$

$$\leqslant\frac{n+k}{2n+2k+2-K(\lambda)}\leqslant\frac{1}{2},$$

另一方面

$$d=\frac{2(n+k)}{(2n+2k+2-K(\lambda))+\sqrt{(2n+2k+2-K(\lambda))^2+4(n+k)K(\lambda)}}$$

$$\geqslant\frac{2(n+k)}{2n+2k+2+2(n+k+1)}=\frac{n+k}{2(n+k+1)}.$$

所以定理 2 成立.

致谢:感谢导师方明亮教授的鼓励和悉心指导.

[参考文献]

[1] Nevanlinna R. Le theoreme de Pecard-Borel et la theorie des functions meromorphes[M]. Paris:Gauthler-Villars,1929.

[2] Ozawa M. On the deficienciess of meromorphic functions[J]. Kodai Math Sem Rep,1968,20:385—388.

[3] 詹小平. 亚纯函数相对亏量和的精密不等式[J].科学通报,1992,37(1):4—7.

[4] 詹小平,蔡海涛. 关于亚纯函数及其导数亏量和的 Ozawa 问题[J].系统科学与数学,2003,23(3):367—373.

[5] 杨乐. 亚纯函数及其导数亏量和的精密估计[J].科学通报,1990,35(16):1208—1210.

[6] Chuang C T. Une generalisation dune inegalite de Nevanlinna[J]. Sci Sinica,1964,13:887—895.

[7] Frank G,Weisenborn G. Rational deficient functions of meromorphic functons[J]. Bull London Math Soc,1986,18(1):29—33.

[8] Hayman W K. Meromorphic functions[M]. Oxford:Clarendon Press,1964.

[9] Frank G. On the zeros of linear differential polynomials of meromorphic functions[J]. Complex Varesbies,1989,12(1—4):77—81.

[10] Steinmetz N. Eine Verallgemeinerung des zweiten Nevanlinnas chen Hauptsatzes[J]. J Reine Angew Math,1968,368:134—141.

On the Deficiency Sums of Wronskians in Ozawa's Problem

Lei Chunlin

(School of Mathematics and Computer Science,Nanjing Normal University,210097,Nanjing,China)

Abstract:Let $f(z)$ be a meromorphic function of finite order λ. Let $a_1,a_2\cdots,a_n$ be linearly independent meromorphic functions which are small with respect to meromorphic function $f(z)$. $L(f)$ is defined by $L(f)=W(a_1,a_2,\cdots,a_n,f)$ and $T(r,f)=O(T(r,L(f)))$. σ_λ is a set of meromorphic functions of finite order. Here

$$K(\lambda)=\inf_{f\in\sigma_\lambda}\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N\left(r,\frac{1}{f}\right)+N(r,f)}{T(r,f)},$$

Then,for any positive integer n

$$\sum_{a\in C}\delta(a,L(f))\leqslant 2-dK(\lambda)$$

with a positive constant $d=d(n,\lambda)$ satisfying

$$\frac{n}{3n+2}\leqslant d\leqslant\frac{1}{3}.$$

Key words:meromorphic function,defiency,order,Wronskians

[责任编辑:陆炳新]