计算 Moore-Penrose 逆的基于矩阵分裂的迭代法

黄燕丽

(南京师范大学数学与计算机科学学院,210097,江苏,南京)

[摘要] 本文给出了使用基于矩阵分裂 $A=M-N$ 的迭代格式 $X_{k+1}=M^+NX_k+M^+$ ($k=0,1,2,\cdots$)计算矩阵 $A\in C^{m\times n}$ 的 Moore-Penrose 广义逆 A^+ 的迭代法收敛的充要条件以及满足收敛性条件的矩阵 M 的取法.

[关键词] Moore-Penrose 逆,迭代法,收敛
[中图分类号]O241.6, [文献标识码]A, [文章编号]1001-4616(2004)03-0040-03

0 引言

上世纪 70 年代,许多学者以广义逆矩阵为工具,研究求解长方或奇异线性方程组的基于矩阵分裂的迭代法,例如文[3—6].到了上世纪 90 年代,这个课题的研究又重新兴起,以广义逆矩阵为工具,不仅研究长方或奇异线性方程组的求解问题,还研究约束线性方程组的求解与广义逆矩阵的计算问题,例如文[7—10].本文主要研究计算 M-P 逆的矩阵迭代,给出了收敛的 proper 分裂的构造方法.

本文采用广义逆矩阵以及数值代数的通用记号.

引理 1[1] 设 $A\in C^{m\times n}$,则 A 的 M-P 逆 A^+ 有下列性质:

(1) $R(A^+)=R(A^*)$,$N(A^+)=N(A^*)$.

(2) $AA^+B=B\Leftrightarrow R(B)\subset R(A)$,$BA^+A=B\Leftrightarrow N(B)\supset N(A)$.

其中 A^* 表示 A 的共轭转置矩阵,$R(A)$,$N(A)$ 分别为 A 的值域和零空间.

引理 2[2] 设 $A\in C^{m\times n}$,$B\in C^{n\times m}$,则 AB 与 BA 有相同的非零特征值,特别地,$\rho(AB)=\rho(BA)$.

1 主要结果

定理 1 设 $A\in C^{m\times n}$,且有分裂 $A=M-N$,则迭代

$$X_{j+1}=M^+NX_j+M^+,\quad j=0,1,2\cdots \tag{1}$$

对任何初始阵 $X_0\in C^{n\times m}$ 收敛到 A^+ 当且仅当

$$\begin{cases}\rho(M^+N)<1 & (2a)\\ R(M)=R(A) & (2b)\\ N(M)=N(A). & (2c)\end{cases}$$

证明 必要性 设迭代(1)对任何 X_0 收敛到 A^+,则有

$$A^+=M^+NA^++M^+. \tag{3}$$

将(1)与(3)相减,得

$$X_{j+1}-A^+=M^+N(X_j-A^+)=\cdots=(M^+N)^{j+1}(X_0-A^+). \tag{4}$$

因为 $X_j\to A^+$,且 X_0 是任意的,所以(4)式表明

$$(M^+N)^{j+1}\to 0\quad (j\to\infty),$$

此即条件(2a)成立.(3)式显然蕴含着 $R(A^+)\subset R(M^+)$.

因为 $I-M^+N$ 是可逆的,所以从(3)式可得

$$A^+=(I-M^+N)^{-1}M^+. \tag{5}$$

此式表明

收稿日期:2003-05-23.
作者简介:黄燕丽,女,1978-,南京师范大学数学与计算机科学学院博士研究生,主要从事数值代数的学习与研究.
E-mail:kitahyl@163.com

$$\operatorname{rank}(A^+) = \operatorname{rank}(M^+),$$

从而有

$$R(A^+) = R(M^+). \tag{6}$$

而(5) 式又意味着

$$N(A^+) = N(M^+). \tag{7}$$

据引理 1,(6) 与(7) 两式等价于(2b,c).

充分性 :设条件(2) 成立.因为

$$(I - M^+N)A^+ = A^+ - M^+(M - A)A^+ = A^+ - M^+MA^+ + M^+AA^+,$$

而据引理 1,从条件(2b,c) 可得

$$M^+MA^+ = A^+, M^+AA^+ = M^+,$$

所以

$$(I - M^+N)A^+ = M^+,$$

此即(3) 式.将(1) 与(3) 相减得(4) 式.因为此时 $\rho(M^+N) < 1$,所以从(4) 式知,对一切 $X_0, X_j \to A^+$.

满足条件(2b,c) 的分裂 $A = M - N$,称为 A 的 proper 分裂,这是文[3] 中提出的概念.

推论　设 $A \in C^{m\times n}$ 有分裂 $A = M - N$,则迭代

$$x_{j+1} = M^+Nx_j + M^+b, j = 0,1,2\cdots$$

对于每个 $x_0 \in C^n$ 与每个 $b \in C^m$ 均收敛到 A^+b 当且仅当

$$\begin{cases}\rho(M^+N) < 1\\ R(M) = R(A)\\ N(M) = N(A).\end{cases}$$

证明　若令 $x_j = x_jb$,则由 b 的任意性及定理 1 立即可得.

现在我们来研究收敛的 proper 分裂的构造方法.

定理 2　设 $A \in C^{m\times n}$,$\operatorname{rank}(A) = r$,$A = FG$ 为 A 的满秩分解,则:

(i) $A = M - N$ 是 A 的 proper 分裂当且仅当 M 可以表示为

$$M = \frac{1}{\alpha}FDG, \tag{8}$$

其中 $\alpha \neq 0$ 为某个实数,D 为某个 r 阶可逆阵,此时 $\rho(M^+N) = \rho(I - \alpha D^{-1})$.

(ii) 任取 D 为只有正特征值的 r 阶可逆阵,则 α 满足条件 $0 < \alpha < 2\lambda_{\min}(D)$ 时,proper 分裂收敛.

证明　(i) 设 $M = HK$ 为满秩分解,则

$R(M) = R(A) \Leftrightarrow R(H) = R(F) \Leftrightarrow H = FD_1$ 对某个可逆阵 D_1,

$N(M) = N(A) \Leftrightarrow N(K) = N(G) \Leftrightarrow K = D_2G$ 对某个可逆阵 D_2.

所以,$A = M - N$ 为 A 的 proper 分裂 $\Leftrightarrow$

$$M = FD_1D_2G \quad \text{对某个可逆阵 } D_1D_2. \tag{9}$$

令 $D_1D_2 = \frac{1}{\alpha}D$,则(9) 就是(8) 的形状.

若 M 如(8) 所示,则 $M^+ = \alpha G^+D^{-1}F^+$,从而

$$\begin{aligned}\rho(M^+N) &= \rho(\alpha G^+D^{-1}F^+(\tfrac{1}{\alpha}FDG - FG))\\ &= \rho(G^+G - \alpha G^+D^{-1}G)\\ &= \rho((G - \alpha D^{-1}G)G^+)\\ &= \rho(I_r - \alpha D^{-1}).\end{aligned}$$

(ii) 设 D 为 r 阶可逆阵,只有正特征值 λ_i,$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_r > 0$.则

$$\begin{aligned}\rho(I - \alpha D^{-1}) < 1 &\Leftrightarrow -1 < 1 - \alpha\lambda_i^{-1} < 1, i = 1,\cdots,r\\ &\Leftrightarrow 0 < \alpha < 2\lambda_i, i = 1,\cdots,r\\ &\Leftrightarrow 0 < \alpha < 2\lambda_r \equiv 2\lambda_{\min}(D).\end{aligned}$$

定理2中的参量 D 与 α 有多种取法可使 $\rho(M^+N)<1$. 设 $A=FG$ 为满秩分解,rank$(A)=r$,则:

(i) 若取 $D=F^*F$,则 α 应满足条件 $0<\alpha<2\lambda_{\min}(F^*F)$. 此时 A 的收敛的 proper 分裂为

$$M=\frac{1}{\alpha}FF^*FG=\frac{1}{\alpha}FF^*A, N=M-A.$$

(ii) 若取 $D=GG^*$,则 α 应满足条件 $0<\alpha<2\lambda_{\min}(GG^*)$. 此时 A 的收敛的 proper 分裂为

$$M=\frac{1}{\alpha}FGG^*G=\frac{1}{\alpha}AG^*G, N=M-A.$$

(iii) 若取 $D=GG^*F^*F$,则 α 应满足条件 $0<\alpha<2\lambda_{\min}(GG^*F^*F)$. 此时 A 的收敛的 proper 分裂为

$$M=\frac{1}{\alpha}FGG^*F^*FG=\frac{1}{\alpha}AA^*A, N=M-A.$$

(iv) 若将 D 取为与 A,F,G 毫不相干的上三角阵

$$D=\begin{bmatrix} d & & \\ & d & & * \\ 0 & & \ddots & \\ & & & d \end{bmatrix}, \text{此中 } d>0,$$

则 α 应满足条件 $0<\alpha<2d$. 此时 A 的收敛的 proper 分裂为

$$M=\frac{1}{\alpha}FDG, N=M-A.$$

致谢 本文的完成得益于陈永林教授的悉心指导,谨此表示衷心感谢!

[参考文献]

[1] 何旭初,孙文瑜. 广义逆矩阵引论[M]. 南京:江苏科学技术出版社,1990.

[2] Horn R A, Johnson C R. Matrix Analysis[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

[3] Berman A, Neumann M. Proper splittings of rectangular matrices[J], SIAM J Appl Math, 1976, 31(2): 307—312.

[4] Berman A, Neumann M. Consistency and splittings[J]. SIAM J Numer Anal, 1976, 13(6): 877—888.

[5] Neumann M. Subproper splittings of rectangular matrices[J]. Lin Alg Appl, 1976, 14(1): 41—51.

[6] Meyer C D, Plemmons R J. Convergent power of a matrix with application to iterative methods for singular systems[J]. SIAM J Numer Anal, 1977, 14(2): 699—705.

[7] Hanke M, Neumann M. Preconditioning and splittings for rectangular systems[J]. Numer Math, 1990, 57(1): 85—95.

[8] 陈旭洲,陈果良. 关于长方矩阵加权 Drazin 逆的一种分裂法[J]. 高校应用数学学报,1993,8(1):71—77.

[9] Chen Xin, Wang Wei, Song Yongzhong. Splittings based on the outer inverses of matrices[J]. Appl Math Comput, 2002, 132(2): 353—368.

[10] Wei Yimin, Li Xiezhang, Wu Hebing. Subproper and regular splittings for restricted rectangular linear systems[J]. Appl Math Comput, 2003, 136(2): 535—547.

Iterative Method for M – P Inverse Based on Matrix Splittings

Huang Yanli

(School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, 210097, Nanjing, China)

Abstract: In this paper, a necessary and sufficient condition for the convergence of iterative method $X_{k+1}=M^+NX_k+M^+$ $(k=0,1,2,\cdots)$ for the Moore-Penrose inverse of $A\in C^{m\times n}$ is establised, and the choice of the matrix M satisfying the convergence condition is also given.

Key words: Moore-Penrose inverse, iterative method, convergence

[责任编辑:陆炳新]