用加权 MP 逆的定义方程推导$[A, B]^{+}_{MN}$的显式

陈永林

(南京师范大学数学与计算机科学学院, 210097, 江苏, 南京)

[摘要]　利用加权 Moore2Penrose 逆 A^{+}_{MN} 的定义方程

$$A^{*} MAX = A^{*} M,\quad R(X) < N^{-1} R(A^{*})$$

简捷地导出了$[A, B]^{+}_{MN}$的显式, 并给出了它的两种变型.

[关键词]　分块矩阵, 加权 Moore2Penrose 逆, Sherman2Morrison2Woodbury 公式

[中图分类号] O241.6,　[文献标识码] A,　[文章编号] 100104616(2004)0400006005

0　引言

我们在文[5]中联合使用 MP 逆的/加边求逆0公式与 Sherman2Morrison2Woodbury 公式, 导出了分块阵$[A, B]$的 MP 逆的显式表示.

我们发现, 如果利用广义逆矩阵的定义方程[2], 分块阵广义逆显式的推导更简单、更快捷. 本文的目的就是按这一思路来推导两分块阵$[A, B]$的加权 MP 逆的显式.

本文沿用文[1]中关于广义逆矩阵的记号.

引理 0.1[2]　设 $A\ I\ C^{m@n}$, M 与 N 分别是 m、n 阶正定阵. 则约束矩阵方程

$$A^{*} MAX = A^{*} M,\quad R(NX) < R(A^{*}),\tag{1}$$

或

$$A^{*} MAX = A^{*} M,\quad V^{*} NX = 0,\tag{1c}$$

有唯一解 $X = A^{+}_{MN}$, 其中我们假设 V 列满秩并适合 $N(A) = R(V)$.

引理 0.2　设 $A\ I\ C^{m@n}$, N 为 n 阶正定阵. 若列满秩阵 V 适合条件 $N(A) = R(V)$, 则对任一 m 阶正定阵 M, 有

$$I - A^{+}_{MN}A = V(V^{*} NV)^{-1} V^{*} N.\tag{2}$$

引理 0.3　设 $A\ I\ C^{m@n}$, M 为 m 阶正定阵. 则 $X\ I\ A\{1, 3M\}$, 即满足条件 $AXA = A$ 与 $(MAX)^{*} = MAX$

$$Z\ A^{*} MAX = A^{*} M,\tag{3}$$

从而 $X\ I\ A\{1, 3M\}$ 的通式是

$$X = A^{+}_{MN} + (I - A^{+}_{MN}A) Z_1,\tag{4}$$

其中 N 是任意取定的 n 阶正定阵, 而 Z_1 是(适当阶的)任意阵.

现在我们考虑两分块阵 $[A, B]\ I\ C^{m@n}$, 其中 $A\ I\ C^{m@p}$, $B\ I\ C^{m@(n-p)}$. 又设 M 为 m 阶正定阵, $N\ S \begin{bmatrix} N_1 & L \\ L^{*} & N_2 \end{bmatrix}$ 为 n 阶正定阵, 其中 N_1 为 p 阶子阵.

令 $D\ S\ A^{+}_{MN_1}B$, $C\ S\ B - AD = (I - AA^{+}_{MN_1})B$. 则据(3)知, A 与 C 是 $M-$ 正交的, 即有性质

$$A^{*} MC = 0.\tag{5}$$

从而, 若设 F_1, F_2 均列满秩, 使得 $N(A) = R(F_1)$, $N(C) = R(F_2)$, 则

$$N([A, C]) = R\left(\begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix}\right).\tag{6}$$

又因 $[A, B]\begin{bmatrix} I & -D \\ 0 & I \end{bmatrix} = [A, C]$, 故有

收稿日期: 2004201204.
作者简介: 陈永林, 1938-, 南京师范大学数学与计算机科学学院教授, 主要从事计算数学与广义逆矩阵的教学与研究.

$$N([A, B]) = R\left(\begin{bmatrix} I & -D \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{bmatrix}\right). \tag{7}$$

据引理 0. 2, 我们有下面两个关系式:

$$F_1(F_1^* N_1 F_1)^{-1} F_1^* = (I - A^{+}_{MN_1} A) N_1^{-1}, \tag{8}$$

$$F_2(F_2^* K F_2)^{-1} F_2^* = (I - C^{+}_{MK} C) K^{-1}, \tag{9}$$

出现于(9) 式中的 K 可以是$(n - p)$ 阶的任一正定阵.

1 主要结果

沿用上节的记号与假定.

定理 1. 1

$$[A, C]^{+}_{MN} = \begin{bmatrix} A^{+}_{MN_1} - (I - A^{+}_{MN_1} A) N_1^{-1} L X_2 \\ X_2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

其中
$$X_2 = C^{+}_{MK} - (I - C^{+}_{MK} C) K^{-1} L^* A^{+}_{MN_1}, \tag{11}$$

而
$$K \equiv N_2 - L^* (I - A^{+}_{MN_1} A) N_1^{-1} L. \tag{12}$$

证明 设$[A, C]^{+}_{MN} \equiv \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$. 据引理 0. 1, 并用(6) 式, 可知$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$是下面的约束矩阵方程的唯一解:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} A^* \\ C^* \end{bmatrix} M [A, C] \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* \\ C^* \end{bmatrix} M \\ \begin{bmatrix} F_1^* & 0 \\ 0 & F_2^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N_1 & L \\ L^* & N_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = 0 \end{cases} \tag{A}$$

注意到(5) 式与(8)、(9) 两式, 这个约束方程等价于次之方程组

$$\begin{cases} A^* M A X_1 = A^* M & ① \\ C^* M C X_2 = C^* M & ② \\ (I - A^{+}_{MN_1} A) N_1^{-1} (N_1 X_1 + L X_2) = 0 & ③ \\ (I - C^{+}_{MK} C) K^{-1} (L^* X_1 + N_2 X_2) = 0 & ④ \end{cases}$$

据引理 0. 3, 从 ① 与 ② 分别可解得

$$X_1 = A^{+}_{MN_1} + (I - A^{+}_{MN_1} A) Z_1,\ Z_1 \text{ 待定}, \qquad ⑤$$

$$X_2 = C^{+}_{MK} + (I - C^{+}_{MK} C) Z_2,\ Z_2 \text{ 待定}, \qquad ⑥$$

将 ⑤ 式代入 ③ 式, 得

$$(I - A^{+}_{MN_1} A) Z_1 = -(I - A^{+}_{MN_1} A) N_1^{-1} L X_2, \qquad ⑦$$

回代入 ⑤ 式, 得

$$X_1 = A^{+}_{MN_1} - (I - A^{+}_{MN_1} A) N_1^{-1} L X_2. \qquad ⑧$$

将 ⑧ 式代入 ④ 式, 可得

$$(I - C^{+}_{MK} C) K^{-1} [L^* A^{+}_{MN_1} - L^* (I - A^{+}_{MN_1} A) N_1^{-1} L X_2 + N_2 X_2] = 0.$$

现在我们令$K \equiv N_2 - L^* (I - A^{+}_{MN_1} A) N_1^{-1} L$, 则上式就变为

$$(I - C^{+}_{MK} C) X_2 = -(I - C^{+}_{MK} C) K^{-1} L^* A^{+}_{MN_1}. \qquad ⑨$$

但从 ⑥ 式知$(I - C^{+}_{MK} C) X_2 = (I - C^{+}_{MK} C) Z_2$, 故从 ⑨ 与 ⑥ 两式得到

$$X_2 = C^{+}_{MK} - (I - C^{+}_{MK} C) K^{-1} L^* A^{+}_{MN_1}. \qquad ⑩$$

⑧ 与 ⑩ 两式所示的 X_1 与 X_2, 就是欲证的表达式.

注 记$H \equiv \begin{bmatrix} F_1^* & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N_1 & L \\ L^* & N_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^* N_1 F_1 & F_1^* L \\ L^* F_1 & N_2 \end{bmatrix}$. H 是正定阵. $F_1^* N_1 F_1$关于H 的Schur 补

为 $N_2 - L^* F_1(F_1^* N_1 F_1)^{-1} F_1^* L = N_2 - L^* (I - A^{+}_{MN_1}A) N_1^{-1} L \triangleq K$, 故 K 为正定阵.

现在来推导 $[A, B]^{+}_{MN} \triangleq \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ 的显式.

注意到(7) 式就是

$$R\left(\begin{bmatrix} A^* \\ B^* \end{bmatrix}\right) = N\left(\begin{bmatrix} F_1^* & 0 \\ 0 & F_2^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ -D^* & I \end{bmatrix}\right),$$

再用引理 0.1, 可知 $\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ 是下面的约束矩阵方程的唯一解:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} A^* \\ B^* \end{bmatrix} M[A, B]\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* \\ B^* \end{bmatrix} M, \\ \begin{bmatrix} F_1^* & 0 \\ 0 & F_2^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ -D^* & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N_1 & L \\ L^* & N_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

利用关系式 $[A, B]\begin{bmatrix} I & -D \\ 0 & I \end{bmatrix} = [A, C]$, 可将这个约束矩阵方程化为等价的如下形式:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} A^* \\ C^* \end{bmatrix} M[A, C]\begin{bmatrix} X_1 + DX_2 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* \\ C^* \end{bmatrix} M, \\ \begin{bmatrix} F_1^* & 0 \\ 0 & F_2^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N_1 & L - N_1 D \\ L^* - D^* N_1 & N_2 + D^* N_1 D - D^* L - L^* D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 + DX_2 \\ X_2 \end{bmatrix} = 0. \end{cases} \tag{B}$$

记 $\mathcal{N} \triangleq \begin{bmatrix} N_1 & L - N_1 D \\ L^* - D^* N_1 & N_2 + D^* N_1 D - D^* L - L^* D \end{bmatrix}$. 将(B) 与(A) 对照, 立即可知

$$\begin{bmatrix} X_1 + DX_2 \\ X_2 \end{bmatrix} = [A, C]^{+}_{M\mathcal{N}}, \tag{13}$$

因而, 只需按定理 1.1 的公式(10) ～ (12) 写出 $[A, C]^{+}_{M\mathcal{N}}$ 的表达式就行了. 对应于 $\mathcal{N}$ 的

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &\triangleq (N_2 + D^* N_1 D - D^* L - L^* D) - (L^* - D^* N_1)(I - A^{+}_{MN_1}A)N_1^{-1}(L - N_1 D) \\ &= N_2 + D^* N_1 D - D^* L - L^* D - L^*(I - A^{+}_{MN_1}A)N_1^{-1}L, \end{aligned} \tag{14}$$

这里使用了 $(I - A^{+}_{MN_1}A)N_1^{-1}N_1 D = (I - A^{+}_{MN_1}A)A^{+}_{MN_1}B = 0$ 以及

$$D^* N_1 (I - A^{+}_{MN_1}A)N_1^{-1} = D^* N_1 N_1^{-1}(I - A^{+}_{MN_1}A)^* = D^*(I - A^{+}_{MN_1}A)^* = 0,$$

所以可以得到

$$\begin{bmatrix} X_1 + DX_2 \\ X_2 \end{bmatrix} = [A, C]^{+}_{M\mathcal{N}} = \begin{bmatrix} A^{+}_{MN_1} - (I - A^{+}_{MN_1}A)N_1^{-1}(L - N_1 D)X_2 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{+}_{MN_1} - (I - A^{+}_{MN_1}A)N_1^{-1}LX_2 \\ X_2 \end{bmatrix},$$

其中

$$X_2 = C^{+}_{M\mathcal{K}} - (I - C^{+}_{M\mathcal{K}}C)\mathcal{K}^{-1}(L - N_1 D)^* A^{+}_{MN_1}. \tag{15}$$

于是容易推得

$$X_1 = A^{+}_{MN_1} - [D + (I - A^{+}_{MN_1}A)N_1^{-1}L]X_2. \tag{16}$$

定理 1.2

$$[A, B]^{+}_{MN} = \begin{bmatrix} A^{+}_{MN_1} - [D + (I - A^{+}_{MN_1}A)N_1^{-1}L]X_2 \\ X_2 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

其中

$$X_2 = C^{+}_{M\mathcal{K}} + (I - C^{+}_{M\mathcal{K}}C)\mathcal{K}^{-1}(D^* N_1 - L^*)A^{+}_{MN_1},$$

$$\mathcal{K} \triangleq K + (D^* N_1 D - D^* L - L^* D) \triangleq N_2 - L^*(I - A^{+}_{MN_1}A)N_1^{-1}L + (D^* N_1 D - D^* L - L^* D).$$

2　$[A, B]^{+}_{MN}$ 的表达式的变型与特例

文[3] 中也给出了定理 1.2 中所述的结果, 但那里是/先验性0 的公式, 似是比照[4] 中结果而得. 文[3]

并没有给出验证过程. 实际上, 验明(17) 式右边的矩阵是[A, B] 的{1, 2, 3M}2 逆是容易的, 但要验明它是[A, B] 的{4N}2 逆却不是容易的.

另外, 当 $M = I_m, N = I_n$ 时, 可以得到$[A, B]^+$ 的显式.

推论 2. 1[3]

$$[A, B]^+ = \begin{bmatrix} A^+ - A^+ BX_2 \\ X_2 \end{bmatrix}, \tag{18}$$

其中

$$\begin{aligned} X_2 &= C_K^+ + (I - C_K^+ C)K^{-1}B^* A^{+*} A^+, \\ K &= I + B^* A^{+*} A^+ B, \\ C &= (I - AA^+)B. \end{aligned}$$

Cline R E(1964) 给出

$$[A, B]^+ = \begin{bmatrix} A^+ - A^+ BC^+ - A^+ B(I - C^+ C)KB^* A^{+*} A^+ (I - BC^+) \\ C^+ + (I - C^+ C)KB^* A^{+*} A^+ (I - BC^+) \end{bmatrix}, \tag{19}$$

其中 $C = (I - AA^+)B, K^{-1} = I + (I - C^+ C)B^* A^{+*} A^+ B(I - C^+ C)$.

Mihalyffy L(1971) 给出一个较简单的公式

$$[A, B]^+ = \begin{bmatrix} (I + TT^*)^{-1}(A^+ - A^+ BC^+) \\ C^+ + T^*(I + TT^*)^{-1}(A^+ - A^+ BC^+) \end{bmatrix}, \tag{20}$$

其中 $C = (I - AA^+)B, T = A^+ B(I - C^+ C)$.

我们在文[5] 中已指明, Mihalyffy 公式与 Cline 公式是一致的, 无条件成立的; 现在我们要来证明, 推论 2. 1 中的结果实际上与他们的结果也是一致的. 为此, 我们先证明定理 1. 1 与 1. 2 中出现的 C^+_{MK} 与C^+_{MK}, $(I - C^+_{MK}C)K^{-1}$ 与$(I - C^+_{MK}C)K^{-1}$之间的几个有趣的关系式.

定理 2. 1 沿用定理 1. 1 与定理 1. 2 中的记号. 则:

(1) $(I - C^+_{MK}C)K^{-1} = [I + (I - C^+_{MK}C)K^{-1}(D^* N_1D - D^* L - L^* D)]^{-1}(I - C^+_{MK}C)K^{-1}$;

(2) $(I - C^+_{MK}C)K^{-1} = [I - (I - C^+_{MK}C)K^{-1}(D^* N_1D - D^* L - L^* D)]^{-1}(I - C^+_{MK}C)K^{-1}$;

(3) $C^+_{MK} = [I + (I - C^+_{MK}C)K^{-1}(D^* N_1D - D^* L - L^* D)]^{-1}C^+_{MK}$;

(4) $C^+_{MK} = [I - (I - C^+_{MK}C)K^{-1}(D^* N_1D - D^* L - L^* D)]^{-1}C^+_{MK}$.

证明 (1) 用文[5] 中引用的 Sherman2Morrison2Woodbury 公式, 注意到 $K \ S \ K + (D^* N_1D - D^* L - L^* D)$, 我们有

$$\begin{aligned} (I - C^+_{MK}C)K^{-1} &= F_2(F^* KF_2)^{-1}F_2^* \\ &= F_2(F_2^* KF_2)^{-1}F_2^* - F_2(F_2^* KF_2)^{-1}F_2^*[I + (D^* N_1D - D^* L - L^* D) \\ &\quad F_2(F_2^* KF_2)^{-1}F_2^*]^{-1}(D^* N_1D - D^* L - L^* D)F_2(F_2^* KF_2)^{-1}F_2^*. \end{aligned}$$

注意到上面的表达式是 $A - A(I + BA)^{-1}BA$ 的形状; 但易证等式

$$A - A(I + BA)^{-1}BA = (I + AB)^{-1}A.$$

从而

$$\begin{aligned} (I - C^+_{MK}C)K^{-1} &= [I + F_2(F_2^* KF_2)^{-1}F_2^*(D^* N_1D - D^* L - L^* D)]^{-1}F_2(F_2^* KF_2)^{-1}F_2^* \\ &= [I + (I - C^+_{MK}C)K^{-1}(D^* N_1D - D^* L - L^* D)]^{-1}(I - C^+_{MK}C)K^{-1}. \end{aligned}$$

(2) 中的等式之证明是类似的.

(3) 暂记 $D \ S \ D^* N_1D - D^* L - L^* D$, 则 $K = K + D$. 将(1) 中的等式变形得

$$[I + (I - C^+_{MK}C)K^{-1}D](I - C^+_{MK}C) = (I - C^+_{MK}C)K^{-1}(K + D) = (I - C^+_{MK}C)(I + K^{-1}D),$$

化简后有

$$C^+_{MK}C + (I - C^+_{MK}C)K^{-1}DC^+_{MK}C = C^+_{MK}C.$$

以 C^+_{MK} 右乘上式, 并注意 $C^+_{MK}CC^+_{MK} = C^+_{MK}$, 可得

$$C^+_{MK} + (I - C^+_{MK}C)K^{-1}DC^+_{MK} = C^+_{MK},$$

从而
$$C_{MK}^{+} = [I + (I - C_{MK}^{+}C)K^{-1}D]^{-1}C_{MK}^{+}.$$

(4) 中的关系式类似地可从(2) 中关系式推得.

利用定理 2.1 中的关系式(1) ~ (4), 我们可获得$[A, B]_{MN}^{+}$ 的三种形式的显式.

定理 2.2 设 $A\ I\ C^{m@p}$, $B\ I\ C^{m@(n-p)}$, M 与 N 分别是 m 与 n 阶正定阵, $N\ S \begin{bmatrix} N_1 & L \\ L^* & N_2 \end{bmatrix}$, N_1 为 p 阶子阵. 令

$$D\ S\ A_{MN_1}^{+}B,\ C\ S\ (I - AA_{MN_1}^{+})B,\ K\ S\ N_2 - L^*(I - A_{MN_1}^{+}A)N_1^{-1}L,$$
$$K\ S\ K + D^* N_1 D - D^* L - L^* D.$$

则
$$[A, B]_{MN}^{+} = \begin{bmatrix} A_{MN_1}^{+} - [D + (I - A_{MN_1}^{+}A)N_1^{-1}L]H_i \\ H_i \end{bmatrix},\quad i = 1, 2, 3 \tag{21}$$

其中
$$H_1\ S\ C_{MK}^{+} + (I - C_{MK}^{+}C)K^{-1}(D^* N_1 - L^*)A_{MN_1}^{+},$$
$$H_2\ S\ [I + (I - C_{MK}^{+}C)K^{-1}(D^* N_1 D - D^* L - L^* D)]^{-1}[C_{MK}^{+} + (I - C_{MK}^{+}C)K^{-1}(D^* N_1 - L^*)A_{MN_1}^{+}], \tag{22}$$
$$H_3\ S\ X_2 - (I - C_{MK}^{+}C)K^{-1}[- D^* N_1 A_{MN_1}^{+} + (D^* N_1 D - D^* L - L^* D)X_2], \tag{23}$$
$$X_2\ S\ C_{MK}^{+} - (I - C_{MK}^{+}C)K^{-1}L^* A_{MN_1}^{+}.$$

当 $M = I_m, N = I_n$ 时, $H_2 = (I + T^* A^+ B)^{-1}[C^+ + T^* A^+]$, 这里 $T\ S\ A^+ B(I - C^+ C)$; 而 Mihalyffy 公式中的对应项是 $C^+ + T^*(I + TT^*)^{-1}(A^+ - A^+ BC^+)$; 这两者是一致的, 因为容易验明
$$(I + T^* A^+ B)[C^+ + T^*(I + TT^*)^{-1}(A^+ - A^+ BC^+)] = C^+ + T^* A^+.$$
这就证明了$[A, B]^{+}$ 的三种表达式(18)、(19)、(20) 是一致的, 它们之间可以互相转换.

[参考文献]

[1] Ben Israd A, Greville T N E. Generalized Inverses: Theory and Applications[M]. 2nd Edition, New York: Springer2Verlag, 2003.

[2] 陈永林. 广义逆 $A_{T,S}^{(2)}$的定义方程与显式表示[J]. 南京师大学报(自然科学版), 2000, 23(2): 5) 8.

[3] Miao Jianming. Representations for the weighted Moore2Penrose inverse of a partitioned matrix[J]. Journal of Computational Mathe2 matics, 1989, 7(14): 320) 323.

[4] Wang Guorong, Chen Yonglin. A recursive algorithm for computing the weighted Moore2Penrose inverse A_{MN}^{+}[J]. Journal of Compu2 tational Mathematics, 1986, 4(1): 74) 85.

[5] 陈永林. Moore2Penrose 逆$[A, B]^{+}$ 的显式的推导[J]. 南京师大学报(自然科学版), 2004, 27(1): 7) 9.

Using the Defining Equation of the Weighted Moore2Penrose Inverse A_{MN}^{+} to Deduce the Explicit Expression of $[A, B]_{MN}^{+}$

Chen Yonglin

(School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, 210097, Nanjing, China)

Abstract: In this paper, using the defining equation for the weighted Moore2Penrose inverse A_{MN}^{+}
$$A^* MAX = A^* M,\quad R(X) < N^{-1}R(A^*)$$
we deduce simply the explicit expression of $[A, B]_{MN}^{+}$, and moreover give its two variants.

Key words: partitioned matrix, weighted Moore2Penrose inverse, Sherman2Morrison2Woodbury formula

[责任编辑: 陆炳新]