四元数实表示的代数应用

连德忠[1],许陆文[2]

(1.福建龙岩师专数学系,364000,福建,龙岩)

(2.南京航空航天大学一院,210016,江苏,南京)

[摘要] 在四元数和四元数向量、矩阵空间上引入并交替使用三种不同的实数表示方式,将四元数体上的李雅普诺夫矩阵方程和二次型转换为实数域上的等价方程组和等价二次型,并在此基础上把四元数自共轭矩阵特征值、四元数向量和矩阵的常用范数、四元数矩阵的数值半径等运算问题一律转换为实数域上的等价运算问题.

[关键词] 四元数,实表示,李雅普诺夫矩阵方程,二次型,右特征值,范数,数值半径

[中图分类号]O151.23, [文献标识码]A, [文章编号]1001-4616(2004)04-0019-06

0 引言

在四元数代数理论中,有关四元数矩阵方程和二次型问题,是近年来国内外学者比较关注的热门课题[1-4],由于四元数乘法的不可交换性,造成四元数之间的运算(尤其是四元数向量与矩阵之间的运算)非常繁琐.为此,文献[7],[8]将文献[9],[10]中有关四元数分量矩阵和蜕变矩阵的概念延拓到四元数向量和矩阵空间,引入三种不同的四元数向量和矩阵实表示方式,将四元数之间及四元数向量和矩阵之间的运算,一律转换为实数域上向量和矩阵之间的运算问题,本文继续采用文献[7],[8]的四元数实表示方法,将四元数体上的李雅普诺夫四元数矩阵方程化为实数域上的等价线性方程组问题,将四元数体上的二次型转换为实数域上的等价二次型问题,并在此基础上把四元数自共轭矩阵特征值、四元数向量和矩阵的常用范数、四元数矩阵的数值半径等运算一律转换为实数域上的等价运算.

1 用四元数的实表示解李雅普诺夫矩阵方程

定义 1.1[7]、[8] 对于实四元数体 Q 上的任意一个四元数 $a = a_0 + a_i\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$,定义

$$\mathbf{s}(a) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \quad \mathbf{m}(a) = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{m}^+(a) = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

分别称 $\mathbf{s}(a)$、$\mathbf{m}(a)$、$\mathbf{m}^+(a)$ 为四元数 a 的坐标、分量矩阵和蜕变矩阵,将 $\mathbf{s}(a)$、$\mathbf{m}(a)$、$\mathbf{m}^+(a)$ 统称为四元数 a 的实表示.

依照定义 1.1,不难验证四元数的实表示均具有线性性质,且:

引理 1.1[7]、[8] 对于任意 a、$b \in Q$,$\mathbf{s}(a \cdot b) = \mathbf{m}(a) \cdot \mathbf{s}(b) = \mathbf{m}^+(b) \cdot \mathbf{s}(a)$.

尽管四元数乘积不具备可交换性,由引理 1.1 可知,四元数乘积的坐标等于四元数实表示的两种不同次序的乘积,这足以求解李雅普诺夫四元数方程[1] $ax + xb = c$(a、b、$c \in Q$).

定理 1.1 四元数李雅普诺夫方程 $ax + xb = c$ 等价于实线性方程组 $[\mathbf{m}(a) + \mathbf{m}^+(b)] \cdot \mathbf{s}(x) = \mathbf{s}(c)$.

证明 对方程两边的四元数同时取坐标,得 $\mathbf{s}(ax + xb) = \mathbf{s}(c)$,根据四元数坐标的线性性质和乘积可交换性质(引理 1.1),

$$\mathbf{s}(ax + xb) = \mathbf{s}(ax) + \mathbf{s}(xb) = \mathbf{m}(a)\mathbf{s}(x) + \mathbf{m}^+(b)\mathbf{s}(x) = [\mathbf{m}(a) + \mathbf{m}^+(b)] \cdot \mathbf{s}(x) = \mathbf{s}(c).$$

这是实数域上的四元一次线性方程组,其解 $\mathbf{s}(x)$ 与 $ax + xb = c$ 中的解 x 等价.

为了求解李雅普诺夫四元数矩阵方程[1]、[3] $AX + XB = C$,其中 X、$C \in Q^{m\times n}$、$A \in Q^{m\times m}$、$B \in Q^{n\times n}$,必

收稿日期:2003-10-11.

作者简介:连德忠,1963-,福建龙岩师专数学系副教授,主要从事数学专业的教学与研究,E-mail:liandezhong@163.com

须引进四元数矩阵的实表示:

定义 1.2[7]、[8]　对于四元数体 Q 上的任意一个矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times m} \in Q^{n\times m}$,定义 $\mathbf{s}(\mathbf{A}) = (\mathbf{s}(a_{ij})) \in \mathbf{R}^{4n\times m}$、$\mathbf{m}(A) = (m(a_{ij})) \in \mathbf{R}^{4n\times 4m}$、$\mathbf{m}^+(A) = (\mathbf{m}^+(a_{ij})) \in \mathbf{R}^{4n\times 4m}$,分别称 $\mathbf{s}(A)$、$\mathbf{m}(A)$、$\mathbf{m}^+(A)$ 为四元数矩阵 A 的坐标、分量矩阵和蜕变矩阵,将 $\mathbf{s}(A)$、$\mathbf{m}(A)$、$\mathbf{m}^+(A)$ 统称为四元数矩阵 A 的实表示.

当 $m=1$ 或 $n=1$ 时,定义 1.2 为四元数列向量和行向量定义了各自的坐标、分量矩阵和蜕变矩阵.

显然,四元数矩阵的实表示也具有线性性质,且满足

引理 1.2[7]、[8]　对于任意矩阵 $A \in Q^{n\times m}$、$B \in Q^{m\times s}$,

$$\mathbf{s}(A\cdot B) = \mathbf{m}(A)\cdot \mathbf{s}(B),\quad \mathbf{s}[(A\cdot B)^T] = \mathbf{m}^+(B^T)\cdot \mathbf{s}(\mathbf{A}^T)$$

由引理 1.2 可知 $\because \mathbf{s}(A\cdot B) \neq \mathbf{m}^+(B^T)\cdot \mathbf{s}(A^T)$,故定理 1.1 的结论不能直接延拓到李雅普诺夫四元数矩阵方程 $AX+XB=C$.

设矩阵 A、B、X、C 的第 i 行、第 j 列的元素分别为 a_{ij}、b_{ij}、x_{ij}、c_{ij},分别取矩阵方程 $AX+XB=C$ 等式两边第 i 行、第 j 列元素,得到等式 $\sum\limits_{k=1}^{m} a_{ik}\cdot x_{kj} + \sum\limits_{k=1}^{n} x_{ik}\cdot b_{kj} = c_{ij}$,两边同时取坐标映射 $\therefore \sum\limits_{k=1}^{m}\mathbf{m}(a_{ik})\cdot\mathbf{s}(x_{kj}) + \sum\limits_{k=1}^{n}\mathbf{m}^+(b_{kj})\cdot\mathbf{s}(x_{ik}) = \mathbf{s}(c_{ij})$.

取遍所有的 i 和 j,得到 (mn) 个四元一次方程组,将这些方程组按序排列,得

$$\left[\mathbf{m}\begin{pmatrix} A & 0_{mm} & \cdots & 0_{mm} \\ 0_{mm} & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0_{mm} & & \cdots & A \end{pmatrix} + \mathbf{m}^+\begin{pmatrix} b_{11}\cdot I_m & b_{21}\cdot I_m & \cdots & b_{n1}\cdot I_m \\ b_{12}\cdot I_m & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \\ b_{1n}\cdot I_m & & \cdots & b_{nn}\cdot I_m \end{pmatrix}\right]\cdot \mathbf{s}\begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{m1} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{pmatrix} = \mathbf{s}\begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{m1} \\ \vdots \\ c_{mn} \end{pmatrix}$$

上式左边中括号里是一个 $(4mn)$ 阶实方阵,上式是实数域上一个 $(4mn)$ 元线性方程组,如果它有惟一解(或无穷多解),原矩阵方程 $AX+XB=C$ 也有惟一解(或无穷多解),且 $\mathbf{s}(x_{11}\ \cdots\ x_{m1}\ \cdots\ x_{mn})^T$ 惟一对应四元数列向量 $(x_{11}\ \cdots\ x_{m1}\ \cdots\ x_{mn})^T$,即惟一对应四元数解矩阵 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{pmatrix}$ 如果该实线性方程组无解,则原四元数矩阵方程也无解.

对于四元数体上的其他类型矩阵方程,如 $AXB=C$,也可采用类似的方法:即取遍矩阵方程两边矩阵所有同行同列的四元数等式,所有等式两边同时用四元数坐标变换,反复利用四元数坐标映射的线性性质和乘积可交换性质,最终可得出矩阵方程的等价实线性方程组.

2　四元数体上的二次型

定义 2.1[4]　设矩阵 $A=(a_{ij}) \in Q^{n\times n}$ 为自共轭阵,对于 Q^n 中每一个向量 $\mathbf{x} = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^T$,规定 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^H A\mathbf{x} = \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\tilde{x}_i a_{ij} x_j$,称 $f(\mathbf{x})$ 为四元数体上的二次型.

四元数体上任意一个二次型满足 $[f(\mathbf{x})]^H = \mathbf{x}^H A\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$,因此 $f(\mathbf{x})$ 是实数.

定理 2.1　四元数体上任意一个二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^H A\mathbf{x}$ 等价于实数域上的二次型 $[\mathbf{s}(\mathbf{x})]^T\cdot\mathbf{m}(A)\cdot\mathbf{s}(\mathbf{x})$.

证明　设 $\mathbf{x} = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^T \in Q^n$, $(x_r = x_{r0} + x_{r1}\mathbf{i} + x_{r2}\mathbf{j} + x_{r3}\mathbf{k}, r=1,2,\cdots n)$、

$A \in Q^{n\times n}$, $A = A^H$,则 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^H A\mathbf{x} = (\tilde{x}_1\ \tilde{x}_2\ \cdots\ \tilde{x}_n)A(x_1\ x_2\ \cdots\ x_n)^T$.

根据引理 1.2, $\mathbf{s}(\mathbf{x}^H A\mathbf{x}) = \mathbf{m}(\mathbf{x}^H)\mathbf{s}(A\mathbf{x}) = \mathbf{m}(\mathbf{x}^H)\mathbf{m}(A)\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{s}[f(\mathbf{x})]$.

按定义 1.2, $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{s}(x_1) \\ \mathbf{s}(x_2) \\ \vdots \\ \mathbf{s}(x_n) \end{pmatrix} = (x_{10}\ x_{11}\ x_{12}\ x_{13}\ \cdots\ x_{n0}\ x_{n1}\ x_{n2}\ x_{n3})^T \in \mathbf{R}^{4n}$,

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}^H)=\mathbf{m}(\tilde{x}_1\quad \tilde{x}_2\quad \cdots\quad \tilde{x}_n)=(\mathbf{m}(\tilde{x}_1)\quad \mathbf{m}(\tilde{x}_2)\quad \cdots\quad \mathbf{m}(\tilde{x}_n))$$

$$=\begin{pmatrix} x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{n0} & x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} \\ -x_{11} & x_{10} & x_{13} & -x_{12} & \cdots & -x_{n1} & x_{n0} & x_{n3} & -x_{n2} \\ -x_{12} & -x_{13} & x_{10} & x_{11} & \cdots & -x_{n2} & -x_{n3} & x_{n0} & x_{n1} \\ -x_{13} & x_{12} & -x_{11} & x_{10} & \cdots & -x_{n3} & x_{n2} & -x_{n1} & x_{n0} \end{pmatrix}\in \mathbf{R}^{4\times 4n},$$

即 $\mathbf{m}(\mathbf{x}^H)$ 的第一行向量为 $[\mathbf{s}(\mathbf{x})]^T$,而 $f(\mathbf{x})$ 为实数,故 $\mathbf{s}[f(\mathbf{x})]=(f(\mathbf{x})\quad 0\quad 0\quad 0)^T\in \mathbf{R}^4$,

由等式 $\mathbf{m}(\mathbf{x}^H)\mathbf{m}(A)\mathbf{s}(\mathbf{x})=\mathbf{s}[f(\mathbf{x})]$ 的第一行可得 $f(\mathbf{x})=[\mathbf{s}(\mathbf{x})]^T\cdot \mathbf{m}(A)\cdot \mathbf{s}(\mathbf{x})$,

不难验证:若 A 为 n 阶四元数自共轭阵,那么 $\mathbf{m}(A)$ 为 $4n$ 阶对称实矩阵,

$[\mathbf{s}(\mathbf{x})]^T\cdot \mathbf{m}(A)\cdot \mathbf{s}(\mathbf{x})$ 为实数域上的二次型,且等于 $f(\mathbf{x})$,结论成立.

定理 2.2 四元数体上任意一个二次型 $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^H A\mathbf{x}$ 等价于实数域上的另一二次型 $[\mathbf{s}(\tilde{x})]^T\cdot \mathbf{m}^+(\tilde{A})\cdot \mathbf{s}(\tilde{x})$,其中 $\tilde{x}=(\tilde{x}_1\quad \tilde{x}_2\quad \cdots\quad \tilde{x}_n)^T\in Q^n$,$\tilde{A}=(\tilde{a}_{ij})\in Q^{n\times n}$.

证明 根据引理 1.2,$\mathbf{s}[f(\mathbf{x})]=\mathbf{s}[(\mathbf{x}^H A\mathbf{x})^T]=\mathbf{m}^+(\mathbf{x}^T)\mathbf{s}[(\mathbf{x}^H A)^T]=\mathbf{m}^+(\mathbf{x}^T)\mathbf{m}^+(\mathbf{A}^T)\mathbf{s}[(\mathbf{x}^H)^T]$,按定义 1.2,$\mathbf{s}[(\mathbf{x}^H)^T]=\mathbf{s}(\tilde{x})=(x_{10}\quad -x_{11}\quad -x_{12}\quad -x_{13}\quad \cdots\quad x_{n0}\quad -x_{n1}\quad -x_{n2}\quad -x_{n3})^T\in \mathbf{R}^{4n}$,

$$\mathbf{m}^+(\mathbf{x}^T)=\mathbf{m}^+(x_1\quad x_2\quad \cdots\quad x_n)=(\mathbf{m}^+(x_1)\quad \mathbf{m}^+(x_2)\quad \cdots\quad \mathbf{m}^+(x_n))$$

$$=\begin{pmatrix} x_{10} & -x_{11} & -x_{12} & -x_{13} & \cdots & x_{n0} & -x_{n1} & -x_{n2} & -x_{n3} \\ x_{11} & x_{10} & x_{13} & -x_{12} & \cdots & x_{n1} & x_{n0} & x_{n3} & -x_{n2} \\ x_{12} & -x_{13} & x_{10} & x_{11} & \cdots & x_{n2} & -x_{n3} & x_{n0} & x_{n1} \\ x_{13} & x_{12} & -x_{11} & x_{10} & \cdots & x_{n3} & x_{n2} & -x_{n1} & x_{n0} \end{pmatrix}\in \mathbf{R}^{4\times 4n},$$

即 $\mathbf{m}^+(\mathbf{x}^T)$ 的第一行向量为 $[\mathbf{s}(\tilde{x})]^T$,因此由等式 $\mathbf{m}^+(\mathbf{x}^T)\mathbf{m}^+(A^T)\mathbf{s}[(\mathbf{x}^H)^T]=\mathbf{s}[f(\mathbf{x})]$ 的第一行可得 $f(\mathbf{x})=[\mathbf{s}(\tilde{x})]^T\cdot \mathbf{m}^+(A^T)\cdot \mathbf{s}(\tilde{x})$;而 $A^T=(A^H)^T=\tilde{A}$,不难验证:若 A 为 n 阶四元数自共轭阵,则 $\tilde{A}$ 也是自共轭阵,$\mathbf{m}^+(\tilde{A})$ 仍为 $4n$ 阶对称实矩阵,即 $[\mathbf{s}(\tilde{x})]^T\cdot \mathbf{m}^+(\tilde{A})\cdot \mathbf{s}(\tilde{x})$ 还是实数域上的二次型,且等于 $f(\mathbf{x})$.

3 四元数自共轭阵的右特征值

定义 3.1[11] 设 $A\in Q^{n\times n}$,若存在四元数 λ 和非零向量 $\alpha\in Q^n$,满足 $A\alpha=\alpha\lambda$,则称 λ 为方阵 A 的右特征值,α 为 λ 的右特征向量.

定理 3.1 四元数自共轭阵 A 的所有右特征值为实数,且等同于 $\mathbf{m}(A)$ 的所有特征值.

证明 设 λ 为四元数 n 阶方阵 A 的右特征值,α 为 λ 的右特征向量,则 $A\alpha=\alpha\lambda$,

那么 $f(\alpha)=\alpha^H A\alpha=\alpha^H\alpha\lambda$ 为实数,不妨记 $\alpha=(x_1\quad x_2\quad \cdots\quad x_n)^T$,$\alpha$ 为 Q^n 上的非零向量,$\alpha^H\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot \tilde{x}_i$ 为正实数,故 $\lambda=\dfrac{f(\alpha)}{\alpha^H\alpha}$ 为实数.

根据文献[12]引理 2,若 A 为 n 阶自共轭阵,则一定存在 n 阶四元数酉阵 U,满足

$$U^H AU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},\text{则}\quad \mathbf{m}(U^H AU)=\mathbf{m}(U^H)\mathbf{m}(A)\mathbf{m}(U)=\mathbf{m}\left(\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\right)$$

其中 λ_1、λ_2、$\cdots\lambda_n$ 为 A 的右特征值.按定义 1.2,容易验证:$\mathbf{m}(U^H)=[\mathbf{m}(U)]^T$,

而 U 为 n 阶酉阵,$U^H\cdot U=U\cdot U^H=I_n$,故 $\mathbf{m}(U^H)\cdot \mathbf{m}(U)=\mathbf{m}(U)\cdot \mathbf{m}(U^H)=\mathbf{m}(I_n)=I_{4n}$,

即 $\mathbf{m}(U)$ 为实数域上 $4n$ 阶正交阵,$\mathbf{m}(A)$ 合同于实矩阵

$$\mathbf{m}\left(\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\mathbf{m}(\lambda_1) & & \\ & \mathbf{m}(\lambda_2) & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{m}(\lambda_n)\end{pmatrix}\in \mathbf{R}^{4n\times 4n},$$

而 $\lambda_r \in R$,$\mathrm{m}(\lambda_r) = \lambda_r I_4 (r = 1,2,\cdots,n)$,因此,若 λ_r 为四元数自共轭阵 A 的单重右特征值,则 λ_r 为 $4n$ 阶对称实矩阵 $\mathrm{m}(A)$ 的四重特征值.

定义 3.2 在自共轭阵 A 的所有右特征值(全为实数)中,称 A 的非零特征值个数(重特征值须累计)r 为 A(或二次型 $\mathbf{x}^H A\mathbf{x}$)的秩;A 的正特征值个数(重特征值须累计)p 为 A(或二次型 $\mathbf{x}^H A\mathbf{x}$)的正惯数,负特征值个数(重特征值须累计)q 为 A(或二次型 $\mathbf{x}^H A\mathbf{x}$)的负惯数.

由定理 3.1 的证明过程不难得出:

推论 3.1 自共轭阵 A 的秩 = $\mathrm{m}(A)$ 秩的四分之一;A 的正惯数 = $\mathrm{m}(A)$ 正惯数的四分之一;A 的负惯数 = $\mathrm{m}(A)$ 负惯数的四分之一.

定义 3.3 如果对于任意非零向量 $\mathbf{x} \in Q^n$,四元数体上的二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^H A\mathbf{x} (\geqslant 0) > 0$,则称该二次型为(半)正定二次型,同时又称相应的四元数矩阵 A 为(半)正定自共轭阵.

定理 3.2 四元数自共轭阵 A 为正定自共轭阵的充要条件是 $\mathrm{m}(A)$ 为实对称正定矩阵;A 为半正定自共轭阵的充要条件是 $\mathrm{m}(A)$ 为实对称半正定矩阵.

证明 若 A 为正定自共扼阵,则 $A = A^H$,且对于任意非零向量 $\mathbf{x} \in Q^n$,$\mathbf{s}(\mathbf{x}) \in R^{4n}$、$\mathbf{s}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$,$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^H A\mathbf{x} = [\mathbf{s}(\mathbf{x})]^T \cdot \mathrm{m}(A) \cdot \mathbf{s}(\mathbf{x}) > 0$,由 Q^n 与 R^{4n} 的同构性可知 $\mathbf{x}$ 的任意性等同于 $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ 的任意性,故 $\mathrm{m}(A)$ 为 $4n$ 阶对称正定实矩阵,即 $\mathrm{m}(A)$ 的所有特征值为正实数,因此 A 的所有右特征值为正实数.

同理,如果 A 为半正定自共轭阵,那么 $\mathrm{m}(A)$ 为实对称半正定矩阵.

4 四元数矩阵的常用范数和数值半径

定义 4.1[13] (i) 对于 Q^n 中每一个向量 $\mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)^T$,规定 $\mathbf{x}$ 的 2 - 范数

$$\|\mathbf{x}\|_2 = (\mathbf{x}^H \cdot \mathbf{x})^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i x_i\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(ii) 设 $A = (a_{ij}) \in Q^{n\times n}$,规定 A 的谱范数 $\|A\|_P = A$ 的最大奇异值;A 的 F - 范数

$$\|A\|_F = [\mathrm{tr}(A \cdot A^H)]^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \tilde{a}_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(iii) 设 $A \in Q^{n\times n}$,规定 A 的数值半径[13] $\rho(A) = \max\limits_{\|\mathbf{x}\|_2 = 1} \|\mathbf{x}^H \cdot A \cdot \mathbf{x}\|_2$ (其中 $\mathbf{x} \in Q^n$)

由于四元数运算的非交换性,使四元数向量和矩阵范数的运算相当困难,如果借助四元数向量和矩阵的实表示,可以将四元数向量和矩阵的范数化为实向量和矩阵的范数.

定理 4.1 四元数列向量 $\mathbf{x}$ 的 2 - 范数等于实向量 $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ 的 2 - 范数[14]

证明 设 $\mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)^T \in Q^n (x_r = x_{r0} + x_{r1}\mathbf{i} + x_{r2}\mathbf{j} + x_{r3}\mathbf{k}, r = 1,2,\cdots n)$,

则 $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = (x_{10} \quad x_{11} \quad x_{12} \quad x_{13} \quad \cdots \quad x_{n0} \quad x_{n1} \quad x_{n2} \quad x_{n3})^T \in \mathbf{R}^{4n}$,

$$\|\mathbf{x}\|_2 = (\mathbf{x}^H \cdot \mathbf{x})^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{r=1}^{n} \tilde{x}_r x_r\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{r=1}^{n}(x_{r0}^2 + x_{r1}^2 + x_{r2}^2 + x_{r3}^2)\right]^{\frac{1}{2}} = \{[\mathbf{s}(\mathbf{x})]^T \cdot \mathbf{s}(\mathbf{x})\}^{\frac{1}{2}} = \|\mathbf{s}(\mathbf{x})\|_2.$$

定理 4.2 对于任意矩阵 $A \in Q^{n\times n}$,A 的谱范数 $\|A\|_P$ 等于实矩阵 $\mathrm{m}(A)$ 的谱范数[14];A 的 F - 范数 $\|A\|_F$ 等于实矩阵 $\mathrm{m}(A)$ Frobennius 范数[14] 的二分之一.

证明 由文献[15]可知 对于任意矩阵 $A \in Q^{n\times n}$,一定存在 n 阶四元数酉阵 U 和 V,满足

$$A = U^H \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix} V,$$

其中 σ_1、$\cdots$、σ_r 为四元数矩阵 A 的奇异值(实数),且

$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$

$$A \cdot A^H = U^H \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix} V \cdot V^H \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & 0 \end{pmatrix} U = U^H \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r^2 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} U,$$

$$\mathbf{m}(A\cdot A^H)=\mathbf{m}(A)\cdot\mathbf{m}(A^H)=\mathbf{m}(A)\cdot[\mathbf{m}(A)]^T=\mathbf{m}\left(U^H\begin{pmatrix}\sigma_1^{\ 2} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r^{\ 2} & \\ & & & 0\end{pmatrix}U\right)$$

$$=\mathbf{m}(U^H)\cdot\mathbf{m}\begin{pmatrix}\sigma_1^{\ 2} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r^{\ 2} & \\ & & & 0\end{pmatrix}\cdot\mathbf{m}(U)=[\mathbf{m}(U)]^T\cdot\begin{pmatrix}\sigma_1^{\ 2}I_4 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r^{\ 2}I_4 & \\ & & & 0\end{pmatrix}\cdot\mathbf{m}(U).$$

而 U 为 n 阶四元数酉阵，则 $\mathbf{m}(U)$ 为实数域上 $4n$ 阶正交阵，即实矩阵 $\mathbf{m}(A)\cdot[\mathbf{m}(A)]^T$ 与实矩阵 $\begin{pmatrix}\sigma_1^{\ 2}I_4 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r^{\ 2}I_4 & \\ & & & 0\end{pmatrix}$ 合同，$\mathbf{m}(A)\cdot[\mathbf{m}(A)]^T$ 的非零特征值为 $\sigma_1^{\ 2}$、…、$\sigma_r^{\ 2}$.

$\mathbf{m}(A)$ 的谱范数 $\|\mathbf{m}(A)\|_2=(\mathbf{m}(A)\cdot[\mathbf{m}(A)]^T$ 最大特征值$)^{1/2}=\sigma_1=A$ 的谱范数 $\|A\|_P$；

同理，设 $A=(a_{ij})\in Q^{n\times n}(a_{ij}=a_{ij0}+a_{ij1}\mathbf{i}+a_{ij2}\mathbf{j}+a_{ij3}\mathbf{k}\in Q^{n\times n},i、j=1,2,\cdots,n)$

则 $$\mathbf{m}(A)=(\mathbf{m}(a_{ij}))=\begin{pmatrix}\ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \begin{pmatrix}a_{ij0} & -a_{ij1} & -a_{ij2} & -a_{ij3}\\ a_{ij1} & a_{ij0} & -a_{ij3} & a_{ij2}\\ a_{ij2} & a_{ij3} & a_{ij0} & -a_{ij1}\\ a_{ij3} & -a_{ij2} & a_{ij1} & a_{ij0}\end{pmatrix} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}\in \mathbf{R}^{4n\times 4n},$$

A 的 F－范数 $\|A\|_F=[\mathrm{tr}(A\cdot A^H)]^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cdot\tilde{a}_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}=\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij0}^2+a_{ij1}^2+a_{ij2}^2+a_{ij3}^2)\right]^{\frac{1}{2}}$，

$\mathbf{m}(A)$ 的 Frobennius 范数 $\|\mathbf{m}(A)\|_F=\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}4(a_{ij0}^2+a_{ij1}^2+a_{ij2}^2+a_{ij3}^2)\right]^{\frac{1}{2}}=2\|A\|_F$，结论成立.

定理 4.3 （i）对于任意矩阵 $A\in Q^{n\times n}$，A 的数值半径 $\rho(A)$ 为实矩阵 $\mathbf{m}(A)$ 的一广义范数[13].

（ii）对于四元数自共轭阵 A，A 的数值半径 $\rho(A)$ 为实矩阵 $\mathbf{m}(A)$ 的谱半径.

证明 （i）$\rho(A)=\max\limits_{\|\mathbf{x}\|_2=1}\|\mathbf{x}^H\cdot A\cdot\mathbf{x}\|_2$，其中 $\mathbf{x}=(x_1\quad x_2\quad\cdots\quad x_n)^T\in Q^n$，$\mathbf{x}^H\cdot A\cdot\mathbf{x}\in Q$，

$\|\mathbf{x}^H\cdot A\cdot\mathbf{x}\|_2^2=\mathbf{s}^T(\mathbf{x}^H\cdot A\cdot\mathbf{x})\cdot\mathbf{s}(\mathbf{x}^H\cdot A\cdot\mathbf{x})\geqslant 0$，而 $\mathbf{s}(\mathbf{x}^H\cdot A\cdot\mathbf{x})=\mathbf{m}(\mathbf{x}^H\cdot A)\mathbf{s}(\mathbf{x})=\mathbf{m}(\mathbf{x}^H)\cdot\mathbf{m}(A)\mathbf{s}(\mathbf{x})$.

由定理 2.1 的证明过程可知：$\mathbf{m}(\mathbf{x}^H)\in R^{4\times 4n}$，$\mathbf{m}(\mathbf{x}^H)$ 的第一行向量为 $\mathbf{s}^T(\mathbf{x})$，第二、三、四行向量均为 $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ 的线性变换，因此 $\mathbf{s}(\mathbf{x}^H\cdot A\cdot\mathbf{x})$ 为 $\mathbf{m}(\mathrm{A})$ 的函数，即 $\rho(A)$ 为 $\mathbf{m}(A)$ 的一非负函数.

对于任意实数 k，容易验证：$\rho(kA)=|k|\cdot\rho(A)$，由 $\rho(A)$ 的定义可知：

$\rho(A)=0\Leftrightarrow A=\mathbf{0}\Leftrightarrow\mathbf{m}(A)=\mathbf{0}$；且对于任意矩阵 $A、B\in Q^{n\times n}$，$\rho(A+B)\leqslant\rho(A)+\rho(B)$，但在一般情况下，$\rho(A\cdot B)\leqslant\rho(A)\cdot\rho(B)$ 不成立，因此 $\rho(A)$ 仅为 $\mathbf{m}(A)$ 的一广义范数.

（ii）对于任意一个自共轭阵 $A\in Q^{n\times n}$ 和任意向量 $\mathbf{x}\in Q^n$，$\mathbf{x}^H\cdot A\cdot\mathbf{x}$ 为四元数体上的一个二次型，$\mathbf{x}^HA\mathbf{x}$ 等价于实数域上的二次型 $[\mathbf{s}(x)]^T\cdot\mathbf{m}(A)\cdot\mathbf{s}(\mathbf{x})$，且 $\|\mathbf{x}\|_2=1\Leftrightarrow\|\mathbf{s}(\mathbf{x})\|_2=1$，

$\rho(A)=\max\limits_{\|\mathbf{x}\|_2=1}\|\mathbf{x}^H\cdot A\cdot\mathbf{x}\|_2=\max\limits_{\|\mathbf{s}(\mathbf{x})\|_2=1}\|[\mathbf{s}(\mathbf{x})]^T\cdot\mathbf{m}(A)\cdot\mathbf{s}(\mathbf{x})\|_2\leqslant\max\limits_{\|\mathbf{y}\|_2=1}\|\mathbf{y}^T\cdot\mathbf{m}(A)\cdot\mathbf{y}\|_2$，

上式中的 $\mathbf{y}$ 是欧氏空间 R^{4n} 中的向量，$\mathbf{m}(A)$ 为 $4n$ 阶对称实矩阵，$\mathbf{m}(A)$ 所有的特征值为实数，从属于 $\mathbf{m}(A)$ 所有的特征值的特征向量构成向量空间 R^{4n} 上的一组基[14]，记 $\mathbf{m}(A)$ 所有特征值中绝对值最大的一个特征值为 λ_1，取 $\mathbf{y}$ 为 $\mathbf{m}(A)$ 从属于 λ_1 的单位特征向量，则

$\max\limits_{\|\mathbf{y}\|_2=1}\|\mathbf{y}^T\cdot\mathbf{m}(A)\cdot\mathbf{y}\|_2=|\lambda_1|=\rho[\mathbf{m}(A)]$，即 $\rho(A)\leqslant\rho[\mathbf{m}(A)]$.

由定理3.1可知,λ_1 是 A 的一右特征值,取 $\mathbf{x}_1$ 为 A 从属于 λ_1 的单位右特征向量,

$\rho(A) = \max\limits_{\|\mathbf{x}\|_2=1} \|\mathbf{x}^H \cdot A \cdot \mathbf{x}\|_2 \geqslant \|\mathbf{x}_1{}^H \cdot A \cdot \mathbf{x}_1\|_2 = \|\mathbf{x}_1{}^H \cdot \mathbf{x}_1 \cdot \lambda_1\|_2$,而 λ_1 为实数,

$\|\mathbf{x}_1{}^H \cdot \mathbf{x}_1 \cdot \lambda_1\|_2 = |\lambda_1| \cdot \|\mathbf{x}_1{}^H \cdot \mathbf{x}_1\|_2 = |\lambda_1|$,故 $\rho(A) \geqslant \rho[\mathbf{m}(A)]$,即 $\rho(A) = \rho[\mathbf{m}(A)]$.

[参考文献]

[1] 郭丽杰,等. 四元数体上李雅普诺夫矩阵方程解的特征确定法[J]. 吉林大学学报(理学版),2003,41(2):169—172.
[2] Wensheng Cao. Hermite Solutions to Quaternion Matrix Equation $AXB = D$[J]. 数学理论与应用,2002,22(1):65—67.
[3] 周硕,等. 关于李雅普诺夫矩阵方程的一种求解问题[J]. 东北电力学院学报,2000,20(1):53—55.
[4] 侯仁民. 四元数体上的二次型问题[J]. 烟台大学学报(自然科学与工程版),1993,10(4):1—4.
[5] 吕洪斌,杨忠鹏. 四元数矩阵的行列式的复表示及应用[J]. 北华大学学报(自然科学版),2002,3(5):369—374.
[6] Adler S L. Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields[M]. New York:Oxford U P,1994.
[7] 连德忠. 四元数向量和矩阵的实表示[J]. 厦门大学学报(自然科学版),2003,42(6):704—708.
[8] 连德忠. 四元数向量和矩阵的秩[J]. 数学研究,2003,36(3):314—317.
[9] 肖尚彬. 四元数矩阵的乘法及其可易性[J]. 力学学报,1994,16(2):159—166.
[10] Ickes B. P. A New Method for Performing Digital Control System Attitude Computations Using Quaternion[J]. AIAA,1970,8(1):75—80.
[11] 陈龙玄. 四元数矩阵的特征值和特征向量[J]. 烟台大学学报(自然科学与工程版),1993,10(3):1—8.
[12] Horn R,Johnson C R. Matrix Analysis[M]. Cambridge:Cambridge University Press,1985.
[13] Xia Tiecheng. On the Numerical Radius of Real Quaternion Matrices[J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics,1999,14(4):50—55.
[14] 程云鹏. 矩阵论[M]. 西安:西安工业大学出版社,2001.109—135.
[15] 庄瓦金. 四元数矩阵的分解与Vavoie不等式的推广[J]. 数学研究与评论,1986,6(4):23—25.
[16] Larry Smith. Linear Algebra[M]. New York:Springer-Verlag,1978.

The Application of the Real Transformations with Quaternion for Algebra Theory

Lian Dezhong[1], Xu Luwen[2]

(1.Longyan Teacher's College, 364000, Longyan, China)
(2.First College of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 210016, Nanjing, China)

Abstract: Three real transformations of quaternion vectors and matrixes were introduced. By using these transformations, Lyapunov matrix equation on quaternion field is changed to linear real equations, the quadric forms of quaternion will be transformed to the quadric forms of real, and the calculation about right eigenvalue of self-conjugate matrixes will be replaced by the eigenvalue of real matrixes. Some familiar norms of quaternion vector and matrix will be replaced by the familiar norms of real vector and matrix. The numerical radius of quaternion self-conjugate matrixes equals to a common norm of real matrixes.

Key words: quaternion, real transformation, Lyapunov matrix equation, quadric form, right eigenvalue, norm, numerical radius

[责任编辑:陆炳新]