具有长条型内边界外问题的耦合法

黄红英[1],朱昌杰[2],杜其奎[1]

(1. 南京师范大学数学与计算机科学学院,210097,江苏,南京)
(2. 淮北煤炭师范学院人事处,235000,安徽,淮北)

[摘要] 本文以具有长条型内边界的二维调和外问题为例,研究一种带有椭圆人工边界的自然边界元与有限元耦合法,给出耦合变分问题的适定性及近似解的误差估计. 理论分析及数值结果表明,用该方法求解带长条型内边界的外问题是十分有效的.

[关键词] 椭圆人工边界,自然边界元,耦合法,有限元,外问题
[中图分类号]O241. 82, [文献标识码]A, [文章编号]1001-4616(2005)01-0030-06

The Coupling of NBE and FEM for 2D Exterior Harmonic Problems in an Elongated Domain

Huang Hongying[1], Zhu Changjie[2], Du Qikui[1]

(1. School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, 210097, Nanjing, China)
(2. Personnel Division, Huaibei Coal Industry Normal College, 235000, Huaibei, China)

Abstract: In this paper, the coupling method is discussed of nature boundary element and finite element method for solving 2D exterior harmonic problem with elliptic artificial boundary, existence and uniqueness are studied of the solution of variational problem with coupling method and error estimates is analyzed about the approximate solution. Theoretical analysis and numerical examples show that our method is very effective.

Key words: elliptic artificial boundary, natural boundary element, coupling, finite element, exterior problem

0 引言

科学与工程计算的许多领域常常遇到无界区域问题,数值求解这类问题一直是人们关注的热点. 由于区域的无界性,这给数值计算带来了一定的困难. 虽然经典的边界元方法可用于求解无界区域问题,但在实际处理时,要涉及到大量的奇异积分的计算,计算量较大. 20 世纪 70 年代末和 80 年代初期冯康教授首创的自然边界元方法[1−4],它与经典的边界元方法相比具有独特的优点:易实现,数值稳定性较好,与有限元基于同一变分原理,且可与有限元方法自然直接地耦合. 具有代表性的优点,就是刚度矩阵保持了原问题的对称性,并有循环性或分块循环性,使得系数的计算量大为减少,从而具有更多的数值计算上的优点. 但自然边界元方法的这一优点正是由自然边界归化的解析上的工作换来的[5,6]. 由于对一般区域上的边值问题往往难以得到相应的 Green 函数,也难以直接应用 Fourier 分析方法和复变函数论方法,从而无法解析地求得自然积分方程和 Poisson 积分公式,因而也就不能直接应用自然边界元方法. 而有限元法适应于较任意的有界区域,于是自然边界元与有限元耦合法运用而生[5,6,8]. 这一耦合法吸取了有限元法能适应较任意区域的优点,克服了自然边界归化时对区域要求的限制.

由于受自然边界归化对区域要求的限制,此前自然边界元与有限元耦合法通常都只能选取圆(对二

收稿日期:2004-07-02.
基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 10471067)及南京师范大学"十五"211"资助项目.
作者简介:黄红英,女,1974—,硕士研究生,主要从事微分方程数值解的学习与研究. E-mail:huanghy@lsec. cc. ac. cn
通讯联系人:杜其奎,1963—,教授,主要从事计算数学的教学与研究. E-mai:duqk@263. net

维问题)或球面(对三维问题)作为人工边界,但对某些具有长条型内边界的外问题而言,以圆或球作为人工边界并非最佳选择,将会导致大量多余的计算,这显然是很不"经济"的.若是选取椭圆(对二维问题)或椭球面(对三维问题)作为人工边界,可使计算区域大大缩小,计算量大为减少.本文以二维调和外问题为例,提出一种基于椭圆人工边界的自然边界元与有限元的耦合法.

设Ω是平面内具有长条型边界的有界单连通区域,其边界$\Gamma_0=\partial\Omega$为光滑或分段光滑的闭曲线,$\Omega^c=R^2\setminus\overline{\Omega}$.我们考虑如下二维 Poisson 方程 Neumann 边值外问题:

$$\begin{cases}\Delta u=0, & \text{在 } \Omega^c \text{ 内},\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=g, & \text{在 } \Gamma_0 \text{ 上},\\ u \text{ 在无穷远处有界}.\end{cases}\tag{1}$$

其中$\boldsymbol{n}=(n_1,n_2)$是区域Ω^c的边界Γ_0的单位外法向量,其方向指向由Γ_0包围的内部区域.$g\in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$为$\Gamma_0$上的已知函数.为保证问题(1)有解,$g$必须满足相容性条件

$$\langle g,1\rangle_{\Gamma_0}\equiv\int_{\Gamma_0}g\mathrm{d}s=0.\tag{2}$$

为了数值求解上述问题(1),我们引入一条椭圆人工边界,将无界区域问题转化到一个"较小"的环型有界子区域上的问题去实现.本文余下的内容可概述如下:先给出椭圆外区域上的 Poisson 积分公式及自然积分方程,并研究耦合变分问题的适定性,然后对变分问题的近似解的误差进行分析,最后给出数值例子,以示该方法的有效性.

1 椭圆外区域上的自然边界归化

为简单起见,不妨设Γ_0所围成的内部区域包含坐标原点.引入椭圆坐标(μ,φ),则平面上的椭圆坐标(μ,φ)与直角坐标(x,y)之间有如下关系

$$\begin{cases}x=f_0\cosh\mu\cos\varphi,\\ y=f_0\sinh\mu\sin\varphi.\end{cases}$$

其中f_0为正常数(椭圆的焦半距).以坐标原点为中心作一包围Γ_0的椭圆$\Gamma_{\mu_1}=\{(\mu,\varphi)\mid\mu=\mu_1,0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$,且$\mathrm{dist}(\Gamma_0,\Gamma_{\mu_1})=\delta>0$.$\Gamma_{\mu_1}$将区域$\Omega^c$分成一个有界子区域$\Omega_1$(即$\Gamma_0$与$\Gamma_{\mu_1}$间的环型区域)和一个具有规则光滑边界的无界子区域$\Omega_2$,(即$\Gamma_{\mu_1}$为内边界的椭圆外区域),$\overline{\Omega^c}=\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2$,$\Omega_1\cap\Omega_2=\varnothing$.

由自然边界归化理论[5,6],在Γ_{μ_1}上的 Dirichlet 边值u_1(即$u(\mu_1,\varphi)$)与其 Neumann 边值$\dfrac{\partial u}{\partial n}$之间具有如下关系

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\mathscr{K}u_1,\ \mu=\mu_1,\tag{3}$$

称为自然积分方程,其中$\mathscr{K}$是自然积分算子.而解u与其 Dirichlet 边值u_1之间的关系为

$$u=\mathscr{P}u_1,\ \mu>\mu_1,\tag{4}$$

称为 Poisson 积分公式,其中$\mathscr{P}$是 Poisson 积分算子.

根据文[7,9],Poisson 积分公式(4)为

$$u(\mu,\varphi)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}a_m\mathrm{e}^{|m|(\mu_1-\mu)+im\varphi},\ \mu>\mu_1,\tag{5}$$

以及自然积分方程(3)为

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{1}{\sqrt{J_0}}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}|m|a_m\mathrm{e}^{im\varphi},\ \mu=\mu_1,\tag{6}$$

其中$a_m=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}u(\mu_1,\varphi')\mathrm{e}^{-im\varphi'}\mathrm{d}\varphi'$,$J_0=f_0^2(\cosh^2\mu_1\sin^2\varphi+\sinh^2\mu_1\cos^2\varphi)$,$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$.

据自然积分方程(6),给出自然积分算子$\mathscr{K}$的如下定义:

$$\langle\mathscr{K}f,v\rangle_{\Gamma_{\mu_1}}=2\pi\sum_{|m|=0}^{+\infty}|m|F_m\overline{V}_m,\ \forall f,v\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\mu_1})\tag{7}$$

其中 $F_m=\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\mu_1,\varphi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{d}\varphi$，$V_m=\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(\mu_1,\varphi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\varphi}\mathrm{d}\varphi$，$\bar{F}_m=F_{-m}$，$\bar{V}_m=V_{-m}$.

对 $s>0$，记

$$H^s(\Gamma_{\mu_1})=\{f\in L^2(\Gamma_{\mu_1}):\|f\|_{s,\Gamma_{\mu_1}}<+\infty\},\tag{8}$$

其中 $\|f\|_{s,\Gamma_{\mu_1}}^2=\sum_{|m|=0}^{+\infty}(1+m^2)^s|F_m|^2$，$F_m$ 的含义如上所述. 以下为书写简便起见，我们记

$$V(\Gamma_{\mu_1})=H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\mu_1})/P_0,\ V(\Omega_1)=H^1(\Omega_1)/P_0.$$

引理1[9]　由(7)定义的自然积分算子 $\mathscr{K}:V(\Gamma_{\mu_1})\to\mathring{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{\mu_1})$ 是线性连续算子(P_0 是 Γ_{μ_1} 上全体常数函数所构成的集合)，且

$$\|\mathscr{K}f\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_{\mu_1}}\leqslant 2\pi\|f\|_{V(\Gamma_{\mu_1})},\ \forall f\in V(\Gamma_{\mu_1}).\tag{9}$$

其中

$$\mathring{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{\mu_1})=\{u_n\in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_{\mu_1})\mid\langle u_n,1\rangle_{\Gamma_{\mu_1}}=0\},$$

$$\|v\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_{\mu_1}}=\sup_{\substack{\omega\in H^{1/2}(\Gamma_{\mu_1})\\ \|\omega\|_{1/2,\Gamma_{\mu_1}}=1}}|\langle v,\omega\rangle_{\Gamma_{\mu_1}}|.$$

又由于

$$\|f\|_{V(\Gamma_{\mu_1})}^2=\inf_{p\in P_0}\|f+p\|_{\frac{1}{2},\Gamma_{\mu_1}}^2=\inf_{p\in P_0}\{\sum_{|m|=1}^{+\infty}(1+m^2)^{\frac{1}{2}}|F_m|^2+|F_0+p|^2\}$$

所以

$$\|f\|_{V(\Gamma_{\mu_1})}^2=(\sum_{|m|=1}^{+\infty}(1+m^2)^{\frac{1}{2}}|F_m|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

2　耦合变分问题及其适定性

利用自然积分算子 $\mathscr{K}$，外问题(1)与下面的有界子区域 Ω_1 上的非局部边值问题等价

$$\begin{cases}\Delta u=0, & \text{在 }\Omega_1\text{ 内},\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=g, & \text{在 }\Gamma_0\text{ 上},\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=-\mathscr{K}(\gamma u), & \text{在 }\Gamma_{\mu_1}\text{ 上}.\end{cases}\tag{10}$$

其中 γ 为迹算子：$\gamma u=u|_{\Gamma_{\mu_1}}$. 问题(10)相应的变分问题为 求 $u\in H^1(\Omega_1)$，使得

$$B(u,v)=\langle g,v\rangle_{\Gamma_0},\ \forall v\in H^1(\Omega_1).\tag{11}$$

其中

$$B(u,v)=\int_{\Omega_1}\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\langle\mathscr{K}(\gamma u),v\rangle_{\Gamma_{\mu_1}},\ \langle g,v\rangle_{\Gamma_0}=\int_{\Gamma_0}gv\mathrm{d}s.$$

对于双线性泛函 $B(\cdot,\cdot)$，有

定理1　双线性泛函 $B(u,v)$ 在 $V(\Omega_1)\times V(\Omega_1)$ 上是对称，连续和强制的.

证明　据[5,6]，易知 $B(u,v)$ 是对称性的. 由(7)及 Schwarz 不等式可得

$$\begin{aligned}|\langle\mathscr{K}(\gamma u),v\rangle_{\Gamma_{\mu_1}}|&\leqslant 2\pi(\sum_{|m|=1}^{+\infty}|m|\cdot|U_m|^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(\sum_{|m|=1}^{+\infty}|m|\cdot|\bar{V}_m|^2)^{\frac{1}{2}}\\&=2\pi(\sum_{|m|=1}^{+\infty}|m|\cdot|U_m|^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(\sum_{|m|=1}^{+\infty}|m|\cdot|V_m|^2)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant 2\pi(\sum_{|m|=1}^{+\infty}(1+m^2)^{\frac{1}{2}}|U_m|^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(\sum_{|m|=1}^{+\infty}(1+m^2)^{\frac{1}{2}}|V_m|^2)^{\frac{1}{2}}\\&=2\pi\|u\|_{V(\Gamma_{\mu_1})}\|v\|_{V(\Gamma_{\mu_1})},\ \forall u,v\in V(\Gamma_{\mu_1}).\end{aligned}$$

再据引理1知

$$
\begin{aligned}
|B(u,v)| &= \left|\int_{\Omega_1}\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\langle\mathscr{K}(\gamma u),v\rangle_{\Gamma_{\mu_1}}\right| \\
&\leqslant |u|_{1,\Omega_1}|v|_{1,\Omega_1}+|\langle\mathscr{K}(\gamma u),v\rangle_{\Gamma_{\mu_1}}| \\
&\leqslant \|u\|_{V(\Omega_1)}\|v\|_{V(\Omega_1)}+2\pi C\cdot\|u\|_{V(\Omega_1)}\|v\|_{V(\Omega_1)} \\
&\leqslant (1+2\pi C)\cdot\|u\|_{V(\Omega_1)}\|v\|_{V(\Omega_1)} \\
&\leqslant C\|u\|_{V(\Omega_1)}\|v\|_{V(\Omega_1)},\ \forall u,v\in V(\Omega_1).
\end{aligned}
$$

由自然积分算子 $\mathscr{K}$ 的定义(7)式,可知对 $u\in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_{\mu_1})$,有

$$
\langle\mathscr{K}u,u\rangle_{\Gamma_{\mu_1}}=2\pi\sum_{|m|=1}^{+\infty}|m|\cdot|U_m|^2\geqslant\sqrt{2}\pi\sum_{|m|=1}^{+\infty}(1+m^2)^{\frac{1}{2}}|U_m|^2=\sqrt{2}\pi\|u\|^2_{V(\Gamma_{\mu_1})}\geqslant 0.
$$

又由[5,6]可知

$$
\|v\|_{V(\Omega_1)}\leqslant C_1|v|_{1,\Omega_1},\ \forall v\in V(\Omega_1).
$$

所以

$$
B(u,u)=\int_{\Omega_1}\nabla u\cdot\nabla u\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\langle\mathscr{K}u,u\rangle_{\Gamma_{\mu_1}}\geqslant\int_{\Omega_1}\nabla u\cdot\nabla u\mathrm{d}x\mathrm{d}y\equiv|u|^2_{1,\Omega_1}\geqslant C\|u\|^2_{V(\Omega_1)}.
$$

定理2 若 $g\in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$,且满足相容性条件,即 $g\in\mathring{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$,则变分问题(11)在商空间 $V(\Omega_1)$ 中存在唯一解且该解连续依赖于给定边值 g.

证明 变分问题(11)解的存在唯一性可由定理1及Lax-Milgram定理立即得到. 下证稳定性. 设 u 为其唯一解,对任意 $p\in P_0$,则

$$
\begin{aligned}
C\|u\|^2_{V(\Omega_1)} &\leqslant B(u,u)=\langle g,u\rangle_{\Gamma_0}=\langle g,u+p\rangle_{\Gamma_0} \\
&\leqslant \|g\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_0}\cdot\inf_{p\in P_0}\|u+p\|_{\frac{1}{2},\Gamma_0} \\
&\leqslant C_1\|g\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_0}\cdot\inf_{p\in P_0}\|u+p\|_{1,\Omega_1} \\
&\leqslant C_2\|g\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_0}\|u\|_{V(\Omega_1)}
\end{aligned}
$$

从而有

$$
\|u\|_{V(\Omega_1)}\leqslant C\|g\|_{-\frac{1}{2},\Gamma_0}.
$$

3 离散化及其误差分析

对区域 Ω_1 作有限元剖分,使其在人工边界 Γ_{μ_1} 上的节点为椭圆坐标 φ 在 $[0,2\pi]$ 的等分点所对应的点. 记 S^h 为相应于该剖分由适当选取的基函数所张成的 $H^1(\Omega_1)$ 的线性子空间,则对应于(11)的离散的变分问题为 求 $u_h\in S^h$,使得

$$
B(u_h,v)=\langle g,v\rangle_{\Gamma_0},\ \forall v\in S^h. \tag{12}
$$

由变分问题(12)出发可得线性方程组

$$
Q\cdot U=b \tag{13}
$$

其中 $Q=Q_1+Q_2$,Q_1 由有界子区域 Ω_1 上的有限元得到的刚度矩阵,而 Q_2 的非零子矩阵正是椭圆外区域自然边界元刚度矩阵. 由定理1知 Q 是对称半正定矩阵. 线性方程组(13)在可差一常向量 b_0 的意义下存在唯一解.

设 u,u_h 分别为变分问题(11)及(12)的解,$\prod_h:H^1(\Omega_1)\to S^h$ 为插值算子.

定理3 (能量模估计)若 $u\in H^2(\Omega_1)$,插值算子 $\prod_h$ 满足

$$
\left\|\phi-\prod\nolimits_h\phi\right\|_{1,\Omega_1}\leqslant ch\|\phi\|_{2,\Omega_1},\ \forall\phi\in H^2(\Omega_1). \tag{14}
$$

则存在常数 $C>0$,使得

$$
|u-u_h|_{1,\Omega_1}\leqslant Ch\|u\|_{2,\Omega_1}. \tag{15}
$$

证明 由 $B(u-u_h,\phi_h)=0$,$\forall\phi_h\in S^h$ 及定理1,有

$$
C_1\|u-u_h\|^2_{V(\Omega_1)}\leqslant B(u-u_h,u-u_h)=B(u-u_h,u-\phi_h)\leqslant C_2\|u-u_h\|_{V(\Omega_1)}\|u-\phi_h\|_{V(\Omega_1)}.
$$

又由于$\prod_h u \in S^h$,所以

$$\begin{aligned}|u-u_h|_{1,\Omega_1} &\leqslant \|u-u_h\|_{H^1(\Omega_1)/P_0} \\ &\leqslant C\inf_{\phi_h\in S^h}\|u-\phi_h\|_{H^1(\Omega_1)} \\ &\leqslant C\Big\|u-\prod_h u\Big\|_{V(\Omega_1)} \\ &\leqslant C\Big\|u-\prod_h u\Big\|_{1,\Omega_1} \\ &\leqslant Ch\cdot\|u\|_{2,\Omega_1}.\end{aligned}$$

类似于文[5,6]中第六章中的方法,还可以得到$u-u_h$的L^2模估计和最大模估计.

定理4　(L^2模估计)若$u\in H^2(\Omega_1)$,插值算子$\prod_h$满足定理3中的条件,且$\int_{\Omega_1}(u-u_h)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$,则

$$\|u-u_h\|_{L^2(\Omega_1)} \leqslant Ch^2\|u\|_{2,\Omega_1}. \tag{16}$$

定理5　(最大模估计)若$u\in H^2(\Omega_1)$,$\prod_h: H^1(\Omega_1)\to S^h$为关联于三角形单元的分片线性插值算子,且$\int_{\Omega_1}(u-u_h)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$,则

$$\|u-u_h\|_{L^\infty(\Omega_1)} \leqslant Ch\|u\|_{2,\Omega_1}. \tag{17}$$

4　数值例子

在下面的数值例子中,区域Ω^c为Γ_0的外部区域,取人工边界为椭圆$\Gamma_{\mu_1}=\{(\mu,\varphi)\mid\mu=\mu_1,\varphi\in[0,2\pi]\}$.对有界区域$\Omega_1$作如下有限元剖分:先将区间$[0,2\pi]$分成$N$等分,相应的在椭圆周$\Gamma_{\mu_1}$上有$N$个分点,使$\Omega_1$上的有限元剖分在$\Gamma_{\mu_1}$上的节点与这些分点重合.计算自然边界元的刚度矩阵$B$(其中$B$为$Q_2$的子矩阵)的元素时,用$\sum\limits_{|m|=0}^{M_0}$替换公式中的$\sum\limits_{|m|=0}^{+\infty}$.用$M$表示$\overline{\Omega}_1$上的节点总数.

例1　用本文的耦合法求解外边值问题(1),其中$\Gamma_0=\{(\mu_0,\varphi)\mid\mu_0=0.5,0\leqslant\varphi\leqslant2\pi\}$为椭圆,

$$g=\frac{-2\sqrt{2}\sinh\mu_0\cos\varphi(\cosh2\mu_0+\cos2\varphi-4\cosh^2\mu_0)}{f_0(\cosh2\mu_0+\cos2\varphi)^2\sqrt{\cosh2\mu_0-\cos2\varphi}}.$$

$f_0=1.25$.该问题的解为$u(\mu,\varphi)=\dfrac{\cosh\mu\cos\varphi}{f_0(\cosh^2\mu-\sin^2\varphi)}+C$.网格参数$(N,M)$取不同的值时,$\overline{\Omega}_1$上节点最大误差及计算CPU运行时间如表1所示.

表1　$\overline{\Omega}_1$上节点的最大误差与计算运行时间

μ_1	网格(N,M)	M_0	$\|u-u_h\|_{L^\infty(\Omega_1)}$	比值	CPU时间(秒)
0.8	(8,24)	20	0.044 7		0.205 1
	(16,80)	20	0.037 3	1.198 4	0.413 2
	(32,288)	20	0.009 6	3.885 4	0.832 4
1.0	(8,24)	20	0.058 4		0.253 3
	(16,80)	20	0.029 8	1.959 7	0.537 2
	(32,288)	20	0.007 3	4.082 2	1.209 1
1.5	(8,24)	20	0.071 4		0.281 4
	(16,80)	20	0.018 2	3.923 1	0.584 3
	(32,288)	20	0.006 0	3.033 3	1.324

例2　设Ω^c为矩形$\{(x,y)\mid|x|\leqslant0.9,|y|\leqslant0.3\}$外部的无界区域,

$$g=\begin{cases}-\dfrac{y^2-0.81}{(0.81+y^2)^2}, & |y|\leqslant0.3,\ x=0.9,\\ \dfrac{y^2-0.81}{(0.81+y^2)^2}, & |y|\leqslant0.3,\ x=-0.9,\\ \dfrac{0.6x}{(0.09+x^2)^2}, & |x|\leqslant0.9,\ y=-0.3\text{ 或 }0.3.\end{cases}$$

该问题的解为 $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} + C.\ f_0 = 1.25$,$M_0 = 30$. 当 μ_1 及网格参数(N,M)取不同的值时,$\overline{\Omega}_1$ 上节点最大误差及计算 CPU 运行时间如表 2 所示.

表 2　$\overline{\Omega}_1$ 上节点的最大误差与计算运行时间

μ_1	网格(N,M)	M_0	$\|u - u_h\|_{L^\infty(\Omega_1)}$	比值	CPU 时间(秒)
	(16,48)	30	0.051 7		0.455 3
0.8	(32,160)	30	0.040 3	1.284 1	0.921 3
	(64,576)	30	0.013 6	2.954 3	4.321 7
	(16,48)	30	0.057 3		0.536 2
1.0	(32,160)	30	0.032 5	1.764 8	1.025 4
	(64,576)	30	0.014 6	2.221 7	5.145 6
	(16,48)	30	0.060 1		1.345 2
1.5	(32,160)	30	0.021 3	2.825 3	5.021 1
	(64,576)	30	0.009 9	2.143 1	12.641 8

由表 1 知数值结果与理论分析相一致. 由表 1 及表 2 均说明用本文的耦合法求解具有长条型内边界的外问题是十分有效的. 由(6)知对于长条型区域,使用椭圆人工边界求的自然边界元刚度矩阵的计算量与使用圆作为人工边界求自然边界元刚度矩阵的计算量相同,但前者导致的计算区域更小,从而使数值求解总体计算量大大减少.

[参考文献]

[1]　冯康. 论微分与积分方程及有限与无限元[J]. 计算数学,1980,2(1):100—105.

[2]　Feng Kang. Canonical boundary reduction and finite element method[C]. Proceedings of International Symposium on the Finite Element Methods(1981, Hefei), Beijing:Science Press,1982. 330—352.

[3]　Feng Kang, Yu Dehao. Canoical integral equations of elliptic boundary value problems and their numerical solutions[C]. Proceedings of China-France Symposium on theFinite Element Methods(1982, Beijing), Beijing:Science Press,1983. 211—252.

[4]　Feng Kang. Finite element Method and natural boundary reduction[C]. Proceedings of the Internatinal Congress Mathematicians, Warszawa:Polish Acadamy Press,1983. 1439—1453.

[5]　余德浩. 自然边界元方法的数学理论[M]. 北京:科学出版社,1993.

[6]　Yu Dehao. Natural Boundary Integral Method And Its Applications[M]. Dordrecht:Kluwer Academic Publishers,2002.

[7]　Ben Porat G, Givoli D. Solution of unbounded domain problems using elliptic artificial boundaries[J]. Communications in Numerical Methods in Engineering,1995,11(5):735—741.

[8]　余德浩. 无界区域上 Stokes 问题的自然边界元与有限元耦合法[J]. 计算数学,1992,14(3):371—378.

[9]　邬吉明,余德浩. 椭圆外区域上的自然边界元法[J]. 计算数学,2000,22(3):355—368.

[责任编辑:陆炳新]