相容双有限 domain 及相关范畴性质

张滦云[1]，王戈平[2]

(1. 淮海工学院数理科学系,222005,江苏,连云港)
(2. 徐州师范大学数学系,221009,江苏,徐州)

[摘要]　将建立在 dcpo 上的双有限 domain 等概念推广到相容定向完备偏序集上,定义了相容定向完备偏序集上的逼近单位、有限分离、相容双有限 domain 等概念,给出了相容双有限 domain 的等价命题. 并从范畴学的角度考察证明了以相容双有限 domain 为对象,Scott 连续映射为态射的范畴 CBF 是笛卡儿闭范畴. 还讨论了相容定向完备偏序集及相容代数 domain 上的几个性质.

[关键词]　相容代数 domain,相容双有限 domain,笛卡儿闭范畴

[中图分类号] O153.1;O189.1,　[文献标识码] A,　[文章编号] 1001-4616(2005)01-0036-06

Consistently Bifinite Domain and Some Properties of Relevant Category

Zhang Luanyun[1], Wang Geping[2]

(1. Department of Mathematics and Physics, Huaihai Institute of Technology, 222005, Lianyungang, China)
(2. Department of Mathematics, Xuzhou Normal University, 221009, Xuzhou, China)

Abstract: This paper generalizes some concepts such as bifinite domains from dcpos to consistently directed complete posets, defines concepts of approximate identity, finitely separated, consistently bifinite domains on consistently directed complete posets, and provides an equivalent proposition of consistently bifinite domains. Then it inspects and proves that the category CBF of consistently bifinite domains with Scott-continuous function is Cartesian closed in terms of category theory. In the end, It also discusses some properties on consistently directed complete posets and consistently algebraic posets

Key words: consistently algebraic domain, consistently bifinite domains, Cartesian closed category

0　引言

双有限 domain 是 G Plotkin 于 1976 年最早开始研究的,他利用有限偏序集序列的双极限技巧,构造了 SFP(= Sequences of Finite Posets) 对象范畴,而双有限 domain 这一术语是 P Taylor 提出的. A Jung 于 1988 年在博士论文中对其进行了深入的研究,他表明有最小元的代数 domain 范畴恰好有两个极大的笛卡儿闭满子范畴——有最小元的双有限 domain 范畴和有最小元的代数 L-domain 范畴[9,10]. 文献[1]给出了双有限 domain 的等价条件,证明了范畴 BF 是范畴 DCPO 的笛卡儿闭满子范畴. 文献[2]针对实数集 R、自然数集 N 的序结构特点,提出了相容连续偏序集、相容代数偏序集等概念,得到了良好的相关性质. 受上面的启发,本文提出了相容双有限 domain 的概念并对其相关范畴性质进行了讨论. 下面先介绍一些预备知识[1~4]:

设 $(P, \leqslant)$ 是偏序集,P 的非空子集 D 称为定向集,若 $\forall a, b \in D$,存在 $c \in D$,使得 $a \leqslant c, b \leqslant c$. 若 P 中的每个定向集 D 有上确界(即并,记为 $\vee D$),则称 P 为定向完备偏序集,简记为 dcpo. 设 P 是 dcpo,若 $\overline{D} \subseteq [P \to P]$ 是定向集且满足 $\vee_{\delta \in \overline{D}} \delta = 1_P$,则称 $\overline{D}$ 为 P 上的逼近单位. 设 $\delta: P \to P$ 是 P 上的 Scott 连续映射,若存在有限子集 F_δ,使得 $\forall x \in P, \exists y \in F_\delta$,使 $\delta(x) \leqslant y \leqslant x$,则称 δ 为有限分离的. 若存在有限分离

收稿日期:2004-06-25.
基金项目:国家自然科学基金资助项目(10371079).
作者简介:张滦云,1968—,讲师,主要从事格上拓扑学的教学与研究. E-mail:lyzhang001@yahoo.com.cn
通讯联系人:王戈平,1941—,教授,主要从事格上拓扑学的教学与研究.

的函数族组成的 P 的逼近单位，则称 P 为有限分离的. 有限分离的 dcpo 称为 FS-domain. 满足下面等价条件之一的 domain 称为双有限 domain：(1) P 是代数的 FS-domain；(2) P 是代数 domain 且存在有限值域的函数组成的逼近单位；(3) 存在 P 的由有限值域的核算子组成的逼近单位. 以 DCPO 表示以 dcpo 为对象，Scott 连续映射为态射的范畴，以 BF 表示以双有限 domain 为对象，Scott 连续映射为态射的范畴，则范畴 BF 是范畴 DCPO 的笛卡儿闭满子范畴.

设 $D \subseteq P$，若 D 是定向的且存在 $p \in P$ 使得 $D \subseteq \downarrow p = \{x \in P : x \leqslant p\}$，则称 D 为 P 中相容定向集. 若 P 中每一相容定向集 D 在 P 中的上确界 $\vee D$ 存在，则称 P 为相容定向完备偏序集. 设 P 是相容定向完备偏序集，$\forall x, y \in P$，若对 P 中任意相容定向集 D，当 $y \leqslant \vee D$ 时，存在 $d \in D$ 使得 $x \leqslant d$，则称 x way-below 于 y，记为 $x \ll y$. 如果 $x \ll x$ 成立，则 x 称为 P 的紧元. P 中全体紧元的集合记为 $K(P)$. 符号 $\Downarrow x$ 表示集合 $\{d \in P : d \ll x\}$，称为 x 的 way-below 下集. 设 P 是相容定向完备偏序集，称 P 是相容连续偏序集（相应地：相容代数偏序集），若 P 满足如下两个条件：(1) $\forall x \in P$，集合 $\Downarrow x$（相应地：集合 $\downarrow x \cap K(P)$）是 P 中定向集；(2) $\forall x \in P$，$x = \vee \Downarrow x$（相应地：$x = \vee \{\downarrow x \cap K(P)\}$）. 相容代数偏序集又称为相容代数 domain. 设 P 是相容定向完备偏序集，$U \subseteq P$，若 U 满足条件：(1) $U = \uparrow U$，即 U 是上集；(2) 对 P 的任一相容定向集 D，当 $\vee D \in U$ 时，存在 $d \in D$ 使 $d \in U$，即 $U \cap D \neq \varnothing$，则称 U 为 P 上的 Scott 开集. P 上 Scott 开集的全体是 P 上的一个拓扑，记为 $\sigma(P)$，称为 P 上的 Scott 拓扑. 设 P, Q 是相容定向完备偏序集，$f: P \to Q$ 是映射. 如果 $f:(P, \sigma(P)) \to (Q, \sigma(Q))$ 是拓扑空间之间的连续映射，则称 f 是 Scott 连续映射. 设 P, Q 是相容定向完备偏序集，$f: P \to Q$ 是映射，则 f 是 Scott 连续映射当且仅当 f 保相容定向并.

1　相容双有限 domain 及相关性质

先将建立在 dcpo 上的一些概念推广到相容定向完备偏序集上来. 以下用 $[P \to Q]$ 表示从 P 到 Q 的全体 Scott 连续映射的集合.

引理 1.1　设 P, Q 是相容定向完备偏序集，则 $[P \to Q]$ 也是一个相容定向完备偏序集.

证明　设 $L = [P \to Q]$，只要证 L 对相容定向集的上确界关闭. 设 F 为 L 中相容定向集，则 $\forall s \in P$，$\{g(s)\}_{g \in F}$ 为 Q 中相容定向集. 定义 $f(s) = \vee_{g \in F} g(s)$，$\forall s \in P$. 可证 $f: P \to Q$ 是 Scott 连续映射. 设 $D \subseteq P$ 为相容定向集，则 $f(\vee D) = \vee_{g \in F} g(\vee D) = \vee_{g \in F} \vee g(D) = \vee_{g \in F} \vee_{d \in D} g(d) = \vee_{d \in D} \vee_{g \in F} g(d) = \vee f(D)$. 因此 L 对相容定向集的上确界关闭.

定义 1.2　设 P 是相容定向完备偏序集. 若 $\bar{D} \subseteq [P \to P]$ 是定向集且满足 $\vee_{\delta \in \bar{D}} \delta = 1_P$，则称 $\bar{D}$ 为 P 上的逼近单位.

引理 1.3　设 $P, Q, P_i (i \in I)$ 是相容定向完备偏序集，则以下性质成立：

(1) 设 $\forall i \in I$，$\bar{D}_i$ 是 P_i 上的逼近单位，则 $\prod_{i \in I} \bar{D}_i = \{\prod_{i \in I} \delta_i : \delta_i \in \bar{D}_i\}$ 是 $\prod_{i \in I} P_i$ 上的逼近单位.

(2) 设 $\bar{D} \subseteq [P \to P]$ 是 P 上的逼近单位，$E \subseteq [Q \to Q]$ 是 Q 上的逼近单位，则 $[\bar{D} \to E]$ 是 $[P \to Q]$ 的逼近单位，其中 $[\bar{D} \to E] = \{[\delta \to \varepsilon] : \delta \in \bar{D}, \varepsilon \in E\}$，这里 $[\delta \to \varepsilon]: [P \to Q] \to [P \to Q]$，使 $[\delta \to \varepsilon](g) = \varepsilon \circ g \circ \delta$，$\forall g \in [P \to Q]$.

证明　(1) 设 $\forall i \in I$，$\delta_i: P_i \to P_i$，$\prod_{i \in I} \delta_i: \prod_{i \in I} P_i \to \prod_{i \in I} P_i$ 点式定义为：$(\prod_{i \in I} \delta_i)((x_i)_{i \in I}) = (\delta_i(x_i))_{i \in I}$. 由 δ_i 是 Scott 连续的可推出 $\prod_{i \in I} \delta_i$ 是 Scott 连续的. 首先可证 $\prod_{i \in I} \bar{D}_i$ 是定向集. 事实上，对任意 $\prod_{i \in I} \delta_i^1, \prod_{i \in I} \delta_i^2 \in \prod_{i \in I} \bar{D}_i$，其中 $\delta_i^1, \delta_i^2 \in \bar{D}_i$，由 $\bar{D}_i$ 是定向集，则 δ_i^1, δ_i^2 有上界 δ_i，从而 $\prod_{i \in I} \delta_i$ 是 $\prod_{i \in I} \delta_i^1, \prod_{i \in I} \delta_i^2$ 的上界. 再证 $\vee_{\delta_i \in \bar{D}_i} (\prod_{i \in I} \delta_i) = 1_{\prod P_i}$. 对任意 $(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} P_i$，其中 $x_i \in P_i$，由 $\bar{D}_i$ 是 P_i 的逼近单位，有 $\vee_{\delta_i \in \bar{D}_i} \delta_i(x_i) = x_i$，则有 $\vee_{\delta_i \in \bar{D}_i} (\prod_{i \in I} \delta_i)((x_i)_{i \in I}) = \vee_{\delta_i \in \bar{D}_i} (\delta_i(x_i))_{i \in I} = (x_i)_{i \in I}$，从而 $\prod_{i \in I} \bar{D}_i$ 是 $\prod_{i \in I} P_i$ 上的逼近单位.

(2) 设 $\{g_i\}_{i \in I}$ 是 $[P \to Q]$ 上相容定向集. $\forall x \in P$，$[\delta \to \varepsilon](\vee_{i \in I} g_i)(x) = \varepsilon \circ (\vee_{i \in I} g_i) \circ \delta(x) = \varepsilon(\vee_{i \in I} g_i(\delta(x))) = \vee_{i \in I} \varepsilon(g_i(\delta(x))) = \vee_{i \in I} [\delta \to \varepsilon](g_i)(x)$，所以 $[\delta \to \varepsilon]$ 是 Scott 连续的. 又可证 $[\bar{D} \to E]$ 是定向集. 事实上，对任意 $[\delta_1 \to \varepsilon_1], [\delta_2 \to \varepsilon_2] \in [\bar{D} \to E]$，其中 $\delta_1, \delta_2 \in \bar{D}$，$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in E$，由 $\bar{D}, E$ 是定

向的,则 δ_1,δ_2 有上界 $\delta\in\bar{D}$,$\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 有上界 $\varepsilon\in E$,易见 $[\delta\to\varepsilon]$ 是 $[\delta_1\to\varepsilon_1]$,$[\delta_2\to\varepsilon_2]$ 的上界. 最后证 $\bigvee[\bar{D}\to E]=1_{[P\to Q]}$,即证 $\bigvee_{\delta\in\bar{D},\varepsilon\in E}[\delta\to\varepsilon](g)=g,\forall g\in[P\to Q]$,即可证 $\bigvee_{\delta\in\bar{D},\varepsilon\in E}\varepsilon\circ g\circ\delta=g$. 事实上,$\bigvee_{\delta\in\bar{D},\varepsilon\in E}\varepsilon\circ g\circ\delta=\bigvee_{\varepsilon\in E}\bigvee_{\delta\in\bar{D}}\varepsilon\circ g\circ\delta=\bigvee_{\varepsilon\in E}\varepsilon\circ g(\bigvee_{\delta\in\bar{D}}\delta)=\bigvee_{\varepsilon\in E}\varepsilon\circ g\circ 1_P=\bigvee_{\varepsilon\in E}\varepsilon\circ g=1_Q\circ g=g$.

定义 1.4 　设 P 是相容定向完备偏序集,$\delta:P\to P$ 是 P 上的 Scott 连续映射. 若存在有限子集 F_δ,使得 $\forall x\in P,\exists y\in F_\delta$,使得 $\delta(x)\leqslant y\leqslant x$,则称 δ 为有限分离的.

定义 1.5 　设 P 是相容定向完备偏序集. 若存在有限分离的函数族组成的 P 的逼近单位,则称 P 为有限分离的.

定义 1.6 　有限分离的相容代数 domain 称为相容双有限 domain.

引理 1.7 　设 P 是相容定向完备偏序集. 若 $\delta\in[P\to P]$ 是有限分离的,则 $\forall x\in P$,有 $\delta(x)\ll x$.

证明 　$\forall x\in P$,设 D 是 P 中相容定向集,且满足 $x\leqslant\bigvee D=\omega$. 要证存在 $d\in D$,使得 $\delta(x)\leqslant d$. 由 δ 是有限分离的,存在有限子集 F_δ,使得 $\forall x\in P$,存在 $y\in F_\delta$,使得 $\delta(x)\leqslant y\leqslant x$. $\forall d\in D$,存在 $y_d\in F_\delta$,使得 $\delta(d)\leqslant y_d\leqslant d$,$\{y_d:d\in D\}$ 是有限集,不妨记为 $\{y^1,\cdots,y^n\}$. 令 $D_i=\{d\in D:y_d=y^i\}$,$i=1,2,\cdots,n$,则 $\{D_i\}$ 两两不相交,且 $\cup_{i=1,2,\cdots,n}D_i=D$. 其中至少存在一个 D_i 是 D 的共尾子集,记 $D_0=D_i$,$y=y^i$,则 $\forall d\in D_0$,有 $\delta(d)\leqslant y\leqslant d$. 由 $\bigvee D_0=\bigvee D=\omega$ 和 δ 的连续性,可得 $\delta(\omega)=\delta(\bigvee D_0)=\bigvee_{d\in D_0}\delta(d)\leqslant y$. 又由 δ 是单调的,有 $\delta(x)\leqslant\delta(\omega)\leqslant y\leqslant d$,其中 $d\in D_0\subseteq D$. 从而 $\delta(x)\ll x$.

定理 1.8 　设 P 是相容定向完备偏序集,则以下性质等价:

(1) P 是相容双有限 domain;

(2) P 是相容代数 domain 且存在有限值域的函数组成的逼近单位;

(3) 存在 P 的由有限值域的核算子组成的逼近单位.

证明 　(2)$\Rightarrow$(1) 只要证 P 是有限分离的. 设 $\bar{D}$ 是由有限值域的函数组成的逼近单位. $\forall\delta\in\bar{D}$,取 $F_\delta=\mathrm{im}\,\delta$($\delta$ 的值域,有限),则 $\forall x\in P,\exists y\in F_\delta$,使 $\delta(x)=y\leqslant x$,故 $\bar{D}$ 是有限分离的逼近单位,从而 P 是有限分离的.

(1)$\Rightarrow$(3) 设 $\bar{D}$ 是由有限分离的函数族组成的 P 的逼近单位,则 $\forall\delta\in\bar{D}$,δ 是有限分离的. 设 δ 的有限分离集为 F_δ. 令 $G_\delta=\{k\in P:\delta(k)=k\}$,显然 $G_\delta\subseteq F_\delta$. 由引理 1.7,$\forall x\in P$,有 $\delta(x)\ll x$,则 $\forall k\in G_\delta$,有 $\delta(k)=k\ll k$. 故 G_δ 是有限的,且每一元都是紧元.

下证 $\forall x\in P$,$G_\delta\cap\downarrow x$ 有最大元. 事实上,显然 $F_\delta\cap\downarrow x\neq\varnothing$,且有限,故存在极小元 z,存在 $y\in F_\delta$,使得 $\delta(\delta(z))\leqslant y\leqslant\delta(z)\leqslant z$. 由 z 的极小性,有 $y=z$,所以 $\delta(z)=z$,则 $z\in G_\delta\cap\downarrow x$,因此 $G_\delta\cap\downarrow x\neq\varnothing$. 可证 $G_\delta\cap\downarrow x$ 是定向集. 任取 $k_1,k_2\in G_\delta\cap\downarrow x$,则 $k_i=\delta(k_i)\leqslant\delta(x)$,$i=1,2$. 由 δ 是有限分离的,存在 $y\in F_\delta$,使得 $\delta(x)\leqslant y\leqslant x$,所以 $k_i\leqslant y\leqslant x$,$i=1,2$. 取 $\{k\in F_\delta\cap\downarrow x:k_i\leqslant k,i=1,2\}$ 的极小元记为 k,则 $k_i=\delta(\delta(k_i))\leqslant\delta(\delta(k))\leqslant\delta(k)$,$i=1,2$. 存在 $y'\in F_\delta$,使得 $\delta(\delta(k))\leqslant y'\leqslant\delta(k)\leqslant k$,由 k 的极小性,有 $y'=k$,故 $\delta(k)=k$,即 $k\in G_\delta\cap\downarrow x$,故 $G_\delta\cap\downarrow x$ 是定向集. 由 $G_\delta\cap\downarrow x$ 定向且有限,故 $G_\delta\cap\downarrow x$ 有最大元.

对 $\delta\in\bar{D}$,定义函数 $k=k_\delta$,使 $k(x)$ 是 $G_\delta\cap\downarrow x$ 的最大元. 显然 $k(x)$ 是紧元. 可证 $k:P\to P$ 是保相容定向并的核算子. 显然 $k(x)\leqslant x$. $k(k(x))$ 是 $G_\delta\cap\downarrow k(x)$ 的最大元,又由 $k(x)$ 是 $G_\delta\cap\downarrow x$ 的最大元且 $k(x)\in G_\delta\cap\downarrow k(x)$,可见 $k(k(x))=k(x)$,即 k 是幂等的. 又显然 x 越大,$G_\delta\cap\downarrow x$ 就越大,最大元也就越大,故 k 是保序的,因此 k 是核算子. 设 $\{x_i\}_{i\in I}$ 是 P 的相容定向集. 令 $x=\bigvee_{i\in I}x_i$,由 k 保序,$\forall i\in I$,$k(x)\geqslant k(x_i)$,则有 $k(x)\geqslant\bigvee_{i\in I}k(x_i)$. 又可证相反的不等式,$k(x)\leqslant x=\bigvee_{i\in I}x_i$,由 $k(x)$ 是紧元,存在 $i\in I$,使得 $k(x)\leqslant x_i$,$k(x)=k(k(x))\leqslant k(x_i)$,则有 $k(x)\leqslant\bigvee_{i\in I}k(x_i)$,因此 $k(x)=\bigvee_{i\in I}k(x_i)$,即 k 保相容定向并.

最后来证 $\{k_\delta:\delta\in\bar{D}\}$ 是逼近单位. 首先易证 $\{k_\delta:\delta\in\bar{D}\}$ 是定向的. 任取 $k_{\delta_1},k_{\delta_2}$,其中 $\delta_1,\delta_2\in\bar{D}$,由 $\bar{D}\subseteq[P\to P]$ 是定向集,存在 $\delta\in\bar{D}$,使得 $\delta_1\leqslant\delta$,$\delta_2\leqslant\delta$,则有 $G_{\delta_1}\cap\downarrow x\subseteq G_\delta\cap\downarrow x$,$G_{\delta_2}\cap\downarrow x\subseteq G_\delta\cap\downarrow x$,$\forall x\in P$. 事实上,若 $y\in G_{\delta_1}\cap\downarrow x$,则有 $\delta_1(y)=y\leqslant x$,$y=\delta_1(y)\leqslant\delta(y)\leqslant y$,从而 $\delta(y)=y$,即 $y\in G_\delta\cap\downarrow x$,故 $G_{\delta_1}\cap\downarrow x\subseteq G_\delta\cap\downarrow x$. 同理可证 $G_{\delta_2}\cap\downarrow x\subseteq G_\delta\cap\downarrow x$. 从而 $k_{\delta_1}(x)\leqslant k_\delta(x)$,$k_{\delta_2}(x)\leqslant k_\delta(x)$.

所以 $\{k_\delta : \delta \in \overline{D}\}$ 是定向的. $\forall k \in K(P)$,由 $\overline{D}$ 是逼近单位,有 $\bigvee_{\delta \in \overline{D}}\delta(k) = k$. 由 k 为紧元,存在 $\delta \in \overline{D}$,使得 $k \leqslant \delta(k)$,从而 $\delta(k) = k$,且由 k_δ 的定义,$k_\delta(k)$ 是 $G_\delta \cap \downarrow k$ 的最大元,故有 $k_\delta(k) = k$,所以 $\bigvee_{\delta \in \overline{D}}k_\delta(k) = k$. 又由 P 是相容代数偏序集,$\forall x \in P$,x 可表示为 $x = \bigvee_{i \in I}\{k_i\}$,其中 $k_i \in K(P)$ 且 $\{k_i\}_{i \in I}$ 是相容定向集,因此 $\bigvee_{\delta \in \overline{D}}k_\delta(x) = \bigvee_{\delta \in \overline{D}}k_\delta(\bigvee_{i \in I}\{k_i\}) = \bigvee_{i \in I}(\bigvee_{\delta \in \overline{D}}k_\delta(k_i)) = \bigvee_{i \in I}k_i = x$.

又由 k_δ 的定义可知,$\forall \delta \in \overline{D}$,$k_\delta$ 的值域有限,从而 $\{k_\delta : \delta \in \overline{D}\}$ 是 P 的由有限值域的核算子组成的逼近单位.

(3)$\Rightarrow$(2) 只要证 P 是相容代数的. 设 $\overline{D} \subseteq [P \to P]$ 是 P 的由有限值域的核算子组成的逼近单位,则 $\forall x \in P$,$\{\delta(x) : \delta \in \overline{D}\}$ 是 P 的定向集,且 $x = \bigvee\{\delta(x) : \delta \in \overline{D}\}$. $\forall \delta \in \overline{D}$,$\delta$ 的值域 $\mathrm{im}\,\delta$ 有限,则 $\mathrm{im}\,\delta$ 中每一元在 $\mathrm{im}\,\delta$ 中是紧元,从而 $\mathrm{im}\,\delta$ 中每一元在 P 中是紧元. 事实上,设 $\delta : P \to P$ 是保相容定向并的核算子. $x, y \in \mathrm{im}\,\delta$,则 $x \ll_{\mathrm{im}\,\delta} y \Leftrightarrow x \ll_P y$,其中 $\Leftarrow$ 显然,只要证 $\Rightarrow$ 设 D 是 P 中的相容定向集,且 $y \leqslant \bigvee D$. 由 $y \in \mathrm{im}\,\delta$,存在 $z \in P$ 使得 $y = \delta(z)$,又由 δ 是核算子,可推得 $\delta(y) = \delta^2(z) = \delta(z) = y$,则有 $y = \delta(y) \leqslant \delta(\bigvee D) = \bigvee_{d \in D}\delta(d)$. 由 $x \ll_{\mathrm{im}\,\delta} y$ 可推出,存在 $d \in D$,使得 $x \leqslant \delta(d) \leqslant d$,从而 $x \ll_P y$. 由上可知,$\forall x \in P$,x 是紧元的定向集之并,所以 P 是相容代数的.

例 1.9 自然数集 $\mathbf{N}$ 是相容双有限 domain,但不是双有限 domain.

由文献[2] 知,$\mathbf{N}$ 是相容代数 domain. 故只需证存在由有限值域的函数组成的逼近单位. $\forall y \in \mathbf{N}$,定义 $\delta_x(y) = \begin{cases} x, y \geqslant x \\ 0, y < x \end{cases}$,其中 $x \in \mathbf{N}$. 显然 $\delta_x : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ 是 Scott 连续的. 对函数族 $\{\delta_{x_i} : x_i \in \mathbf{N}\}$ 作有限并,不妨设 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$,则有

$$\delta(y) = \delta_{x_1} \vee \delta_{x_2} \vee \cdots \vee \delta_{x_n}(y) = \begin{cases} x_n, y \geqslant x_n; \\ x_{n-1}, x_n > y \geqslant x_{n-1}; \\ \cdots \\ x_1, x_2 > y \geqslant x_1; \\ 0, y < x_1. \end{cases}$$

易见 $\forall U \in \sigma(\mathbf{N})$,有 $\delta^{-1}(U) = \begin{cases} \mathbf{N}, 0 \in U \text{ 即 } U = \mathbf{N} \\ \uparrow x_1 = \Uparrow x_1, 0 \notin U, x_1 \in U; \\ \uparrow x_2 = \Uparrow x_2, x_1 \notin U, x_2 \in U; \\ \cdots \\ \uparrow x_n = \Uparrow x_n, x_{n-1} \notin U, x_n \in U; \\ \varnothing, x_n \notin U \text{ 或 } U = \varnothing. \end{cases}$

故 δ 是 Scott 连续映射. 全体这样的 δ 的集合记为 $\overline{D}$,则 $\overline{D} \subseteq [\mathbf{N} \to \mathbf{N}]$ 为定向集,且 $\forall \delta \in \overline{D}$,$\delta \leqslant 1_{\mathbf{N}}$,且 $\bigvee_{\delta \in \overline{D}}\delta = 1_{\mathbf{N}}$,故 $\overline{D}$ 是由有限值域的函数组成的逼近单位,从而 $\mathbf{N}$ 为相容双有限 domain.

注意到,自然数集 $\mathbf{N}$ 不是 dcpo,显然不是双有限 domain.

例 1.10 设 X 是一个无限集,它的有限子集全体 $X^{(F)}$ 依集合包含序构成相容代数 domain[1]. 类似例 1.9 可证 $X^{(F)}$ 中存在由有限值域的函数组成的逼近单位,从而是相容双有限 domain. $X^{(F)}$ 也不是双有限 domain.

2 相容双有限 domain 范畴的笛卡儿闭性

为了能较好地支持计算机程序设计语言,有关各种 domain 的笛卡儿闭性的讨论一直是人们关注的热点之一. 我们知道,代数性在函数空间的算子下一般不能够保持. $\forall f \in [L \to M]$,f 可表为一些紧元(一步函数)的并,但集合 $\downarrow f \cap K([L \to M])$ 未必是定向集,因而函数空间未必是代数的[7].

以相容双有限 domain 为对象,Scott 连续映射为态射的范畴记为 CBF. 通过本节的讨论可知范畴 CBF 是笛卡儿闭范畴,从而是较好的范畴.

引理 2.1 若 L, M 是相容双有限 domain,则 $L \times M$ 也是相容双有限 domain.

证明 显然 $L \times M$ 按点式序成为偏序集. 由 L, M 是相容定向完备偏序集,显然 $L \times M$ 也是相容定向完

备偏序集. 设$\overline{D}$,E分别是L,M的由有限值域的核算子组成的逼近单位. 由引理1.3,$\overline{D}\times E = \{\delta\times\varepsilon : \delta\in\overline{D}, \varepsilon\in E\}$是$L\times M$上的逼近单位. 又$\delta\times\varepsilon(x,y) = (\delta(x),\varepsilon(y)) \leqslant (x,y)$,并且$\delta\times\varepsilon(\delta\times\varepsilon(x,y)) = \delta\times\varepsilon(\delta(x),\varepsilon(y)) = (\delta(\delta(x)),\varepsilon(\varepsilon(y))) = (\delta(x),\varepsilon(y)) = \delta\times\varepsilon(x,y)$. 故$\delta\times\varepsilon$是有限值域的核算子,所以由定理1.8知$L\times M$也是相容双有限domain.

引理2.2　若L,M是相容双有限domain,则$[L\to M]$也是相容双有限domain.

证明　由引理1.1,$[L\to M]$是相容定向完备偏序集. 设$\overline{D}$,E分别是L,M中的由有限值域的核算子组成的逼近单位. $[\overline{D}\to E] = \{[\delta\to\varepsilon] : \delta\in\overline{D},\varepsilon\in E\}$,其中$[\delta\to\varepsilon](g) = \varepsilon\circ g\circ\delta$,$\forall g\in[L\to M]$. 来证$[\overline{D}\to E]$是$[L\to M]$的由有限值域的核算子组成的逼近单位. $[\delta\to\varepsilon]$是Scott连续映射的合成,因而是Scott连续的,且$\bigvee_{[\delta\to\varepsilon]\in[\overline{D}\to E]}[\delta\to\varepsilon](g) = \bigvee_{\delta\in\overline{D}}\bigvee_{\varepsilon\in E}\varepsilon\circ g\circ\delta = (\bigvee_{\varepsilon\in E}\varepsilon)\circ g\circ(\bigvee_{\delta\in\overline{D}}\delta) = 1_M\circ g\circ 1_L = g$,$\forall g\in[L\to M]$,因此$[\overline{D}\to E]$是$[L\to M]$上的逼近单位. 又$[\delta\to\varepsilon]^2(g) = \varepsilon^2\circ g\circ\delta^2 = \varepsilon\circ g\circ\delta = [\delta\to\varepsilon](g)$,且$[\delta\to\varepsilon](g) = \varepsilon\circ g\circ\delta\leqslant g$,故$[\delta\to\varepsilon]$是核算子. 另外$[\delta\to\varepsilon]$的值域可看作从有限集$\mathrm{im}\,\delta$到有限集$\mathrm{im}\,\varepsilon$的单调函数的全体,从而值域有限. 所以由定理1.8知$[L\to M]$是相容双有限domain.

引理2.3　设C,L,M是相容定向完备偏序集,则$f:C\times L\to M$是Scott连续映射的充要条件是f关于每一变量分别是Scott连续的,即$\forall c\in C$,$f(c,-):L\to M$及$\forall g\in L$,$f(-,g):C\to M$均是Scott连续的.

证明　必要性:$\forall c\in C$,对L中任一相容定向集X,f是Scott连续的,有$f(c,-)(\bigvee X) = f(c,\bigvee X) = f\bigvee_{x\in X}(c,x) = \bigvee_{x\in X}f(c,x) = \bigvee_{x\in X}f(c,-)(x)$,因此$f(c,-):L\to M$是Scott连续的. 同理可证$\forall g\in L$,$f(-,g):C\to M$也是Scott连续的.

充分性　设$D\subseteq C\times L$为相容定向集. 对$d = (d_1,d_2)\in D$,易见$\bigvee D = (a_1,a_2) = (\bigvee_{d\in D}d_1,\bigvee_{d\in D}d_2)$,则$f(\bigvee D) = f(a_1,a_2) = f(\bigvee_{d\in D}(d_1,a_2)) = \bigvee_{d\in D}f(d_1,a_2) = \bigvee_{d\in D}f(d_1,\bigvee_{e\in D}e_2) = \bigvee_{d\in D}\bigvee_{e\in D}f(d_1,e_2)$. 由于$D$是相容定向的,对$d,e\in D$,存在$t\in D$,使得$d,e\leqslant t$. 因为$f$关于两个变量分别是单调的,则有$f(\bigvee D)\leqslant\bigvee_{t\in D}f(t_1,t_2) = \bigvee f(D)$. 又显然有$\bigvee f(D)\leqslant f(\bigvee D)$,从而有$f(\bigvee D) = \bigvee f(D)$.

引理2.4　设L,M是相容定向完备偏序集,则赋值映射$ev:[L\to M]\times L\to M$,$(h,d)\to h(d)$是Scott连续的.

证明　由引理2.3知,只要证$\forall h\in[L\to M]$,$ev(h,-):L\to M$及$\forall d\in L$,$ev(-,d):[L\to M]\to M$均是Scott连续的. $\forall h\in[L\to M]$,设D是L中任一相容定向集,则$ev(h,-)(\bigvee D) = ev(h,\bigvee D) = h(\bigvee D) = \bigvee h(D) = \bigvee ev(h,-)(d)$,因此$ev(h,-)$是Scott连续的. $\forall d\in L$,设$\{g_i\}_{i\in I}$是$[L\to M]$中任一相容定向集,则$ev(-,d)(\bigvee_{i\in I}g_i) = ev(\bigvee_{i\in I}g_i,d) = \bigvee_{i\in I}g_i(d) = \bigvee_{i\in I}ev(-,d)(g_i)$,因此$ev(-,d)$是Scott连续的.

定理2.5　范畴CBF是笛卡儿闭范畴.

证明　易见此范畴的终对象是单点集. 由引理2.1知,任意两对象L与M的笛卡儿积$L\times M$赋予点式序是相容双有限domain,投影映射为Scott连续映射,从而$L\times M$是范畴CBF中L与M的乘积对象,即范畴CBF有有限乘积. 对象L与M的指数对象为相容双有限domain $[L\to M]$. 赋值映射$ev:[L\to M]\times L\to M$,$ev(h,d) = h(d)$,满足对范畴CBF中的每个态射$f:C\times L\to M$,存在唯一态射$\wedge_f:C\to[L\to M]$,使$ev\circ(\wedge_f\times id_L) = f$. 定义$\wedge_f:C\to[L\to M]$,$x\to f(x,-)$. 易证$\wedge_f$是唯一满足$ev\circ(\wedge_f\times id_L) = f$的Scott连续映射. 从而范畴$CBF$是笛卡儿闭范畴.

推论2.6　范畴CBF是相容代数domain范畴的笛卡儿闭满子范畴.

3　其它相关性质

本节给出相容定向完备偏序集以及相容代数domain上的几个性质.

定理3.1　设P是相容定向完备偏序集,则以下条件等价:

(1) P是相容代数的;

(2) P是相容连续的,且$x\ll y\Leftrightarrow\exists k\in K(P)$使$x\leqslant k\leqslant y$.

证明　(1)$\Rightarrow$(2) $\forall x\in P$,令$D = \downarrow x\cap K(P)$,由$P$是相容代数的,则$D$是定向集,且有$x = \bigvee D$. $\forall d\in D$,有$d\ll d\leqslant x$,从而$d\ll x$,即$D\subseteq\Downarrow x$. 从而P是相容连续的.

下证 $x \ll y \Leftrightarrow \exists k \in K(P)$ 使 $x \leqslant k \leqslant y$. 设 $x \ll y$,令 $D_1 = \downarrow y \cap K(P)$,由 P 是相容代数的,可知 D_1 是定向集,且 $y = \vee D_1$,故 $\exists k \in D_1$,使得 $x \leqslant k \leqslant y$,$k \in K(P)$. 另一方面,设 $\exists k \in K(P)$ 使得 $x \leqslant k \leqslant y$. 因为 $k \ll k$,从而有 $x \ll y$.

(2) $\Rightarrow$ (1) $\forall y \in P$,设 P 是相容连续的,则 $\Downarrow y$ 是定向集,且 $y = \vee \Downarrow y$. 先证 $\downarrow y \cap K(P)$ 为定向集. 设 $k_1, k_2 \in \downarrow y \cap K(P)$,则 $k_1 \ll k_1 \leqslant y = \vee \Downarrow y$,$\exists x_1 \in \Downarrow y$ 使得 $k_1 \leqslant x_1$. 同理,$\exists x_2 \in \Downarrow y$ 使得 $k_2 \leqslant x_2$,由 $\Downarrow y$ 定向,$\exists x \in \Downarrow y$ 使得 $x_1 \leqslant x, x_2 \leqslant x$. 所以 $k_1 \leqslant x \ll y, k_2 \leqslant x \ll y$. 再由(2),$\exists k \in K(P)$ 使得 $x \leqslant k \leqslant y, k \in \downarrow y \cap K(P)$,则 $k_1 \leqslant k, k_2 \leqslant k$,即 $\downarrow y \cap K(P)$ 为定向集.

又设 $x \ll y$,即 $x \in \Downarrow y$,由(2)知 $\exists k \in K(P)$ 使 $x \leqslant k \leqslant y, k \in \downarrow y \cap K(P)$,可推出 $y = \vee \Downarrow y \leqslant \vee \left(\downarrow y \cap K(P)\right)$,由此得 $y = \vee \left(\downarrow y \cap K(P)\right)$. 从而 P 是相容代数的.

定理 3.2 设 P 是相容定向完备偏序集,则有以下结论:

(1) 若 P 有最小元 0,则 $0 \in K(P)$;

(2) 若 $x, y \in K(P)$,且 $x \vee y$ 存在,则 $x \vee y \in K(P)$.

证明 显然.

定理 3.3 设 P 是相容定向完备偏序集. 若 P 上有逼近单位 $\overline{D}$,且使 $\forall \delta \in \overline{D}, \forall x \in P$,有 $\delta(x) \ll x$,则 P 是相容连续偏序集.

证明 由 $\vee_{\delta \in \overline{D}} \delta = 1_P$,有 $\forall x \in P$,$\vee \{\delta(x) : \delta \in \overline{D}\} = x$,其中 $\delta(x) \ll x$,则有 $\{\delta(x) : \delta \in \overline{D}\} \subseteq \Downarrow x$ 且定向,故可推出 $\Downarrow x$ 是定向集,且 $\vee \Downarrow x = x$. 所以 P 是相容连续偏序集.

本文是在导师王戈平教授的启发、指导和协作下完成的,对此表示深深感谢. 也感谢扬州大学徐罗山教授给予的有益指教.

[参考文献]

[1] Gierz G, Hofmann K H, Keimel K, *et al*. Continuous Lattices and Domains[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

[2] 徐罗山. 相容连续偏序集及其定向完备化[J]. 扬州大学学报(自然科学版),2000,3(1):1—6.

[3] 王戈平,时根保. φ-归纳集与偏序集的一个分类定理[J]. 数学年刊,1993,14(1):111—117.

[4] 徐罗山. 相容 L-domain 及其相关范畴性质[J]. 扬州大学学报(自然科学版),2002,5(1):1—7.

[5] 郑崇友,樊磊,崔宏斌. Frame 与连续格[M]. 北京:首都师范大学出版社,1994.

[6] 陈仪香. 稳定映射与局部代数格范畴的笛卡儿闭性[J]. 数学学报,1997,40(4):597—602.

[7] 陈仪香. 形式语义学的稳定论域理论[M]. 北京:科学出版社,2003.

[8] Gierz G, Hofmann K H, Keimel K, *et al*. A Compendium of Continuous Lattices[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1980.

[9] Jung A. Cartesian closed categories of domains[D]. CWI Tracts. Amsterdam: North-Holland, 1988.

[10] 梁基华,刘应明. Domain 理论与拓扑[J]. 数学进展,1999,28(2):97—102.

[11] 管雪冲. 一类局部定向完备集及其范畴的性质[D]. 硕士学位论文. 徐州师范大学,2002.

[责任编辑:陆炳新]