

## 具有非线性出生率的时滞 Lasota-Ważewska 模型的稳定性分岔

马苏奇<sup>1,2</sup>, 陆启韶<sup>1</sup>

( 1. 北京航空航天大学理学院, 100083 北京 )

( 2. 中国农业大学理学院, 100083 北京 )

[ 摘要 ] 研究了一类 Lasota-Ważewska 单种群人口模型  $x'(t) = -\mu x(t) + pe^{-d\tau}e^{-\gamma x(t-\tau)}$ . 其中的出生率是时滞  $\tau$  的非线性函数  $pe^{-d\tau}$  而不是常数  $p$ . 应用选择性的方法或中心流形定理, 确定了分岔周期解的稳定性及 Hopf 分岔的方向. 应用计算机软件和数值方法, 也得到了一些相图和轨线的时间历程图.

[ 关键词 ] Lasota-Ważewska 模型, 成熟时滞, Hopf 分岔

[ 中图分类号 ] O175.13, [ 文献标识码 ] A, [ 文章编号 ] 1001-4616(2005)02-0001-05

## Stability Bifurcations of Lasota-Ważewska-type Model with Maturation Delay and Nonlinear Birth Rate

Ma Suqi<sup>1,2</sup>, Lu Qishao<sup>1</sup>

( 1. School of Science, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 100083, Beijing, China )

( 2. School of Science, China Agricultural University, 100083, Beijing, China )

**Abstract** A Lasota-Ważewska-type single species population model  $x'(t) = -\mu x(t) + pe^{-d\tau}e^{-\gamma x(t-\tau)}$  is investigated. We think its birth rate as  $pe^{-d\tau}$  which is nonlinear about the delay  $\tau$  instead of constant  $p$ . By exploring an alternative approach, which is also called as Center Manifold, we determine the stability of bifurcating periodic solutions and the direction of Hopf bifurcation. Some phase portraits, waveform diagrams are also given by computer simulation.

**Key words** Lasota-Ważewska model, maturation delay, Hopf bifurcation

## 0 引言

本文研究下面的 Lasota-Ważewska 型的人口模型

$$x'(t) = -\mu x(t) + pe^{-\sum_{i=1}^n d_i \tau_i} e^{-\gamma x(t-\tau)}. \quad (1)$$

其中  $\tau = \sum_{i=1}^n \tau_i$  是成熟时间. 假设种群人口从出生到成熟可分为  $n$  个生命阶段, 并假设各个生命阶段所花费的时间为  $\tau_i$ , 死亡率常数为  $d_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).  $x(t)$  表示  $t$  时刻成年人口的数量. 注意到若  $\tau_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 方程 (1) 恰好是文 [1] 提出的模型. 文 [2~4] 也得到了  $d_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 时方程 (1) 的线性化振荡的结果和全局吸引性条件. 然而, 对于方程 (1) 某  $d_i > 0$  的情形, 目前还没有文献涉及, 有关时滞微分方程的中心流形理论和 Normal Form 方法见 [5].

## 1 线性化稳定性

为准确计算 (1) 的正平衡点, 我们给出特殊函数 Lambert  $W$  函数的定义.

**定义 1** Lambert  $W$  函数满足

$$\text{Lambert } W(x) \exp(\text{Lambert } W(x)) = x,$$

收稿日期: 2004-06-28.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10432010).

作者简介: 马苏奇, 女, 1974—, 中国农业大学讲师, 北京航空航天大学博士生, 主要从事生物数学的教学与研究. E-mail: masuqi@sina.com  
万方数据

对每个非零的  $x$ , 方程  $y \exp(y) = x$  的解是不唯一的, 因而 Lambert  $W$  函数有多值分支. 其中在原点解析的分支被称为 Lambert  $W$  函数的主值分支, 用  $\text{Lambert}W(x)$  表示. 而且

$$\text{Lambert}W'(x) = \frac{\text{Lambert}W(x)}{(1 + \text{Lambert}W(x))x}. \quad (2)$$

以下讨论方程在 (1)  $d_i = d > 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 的情形.

令  $\tau = \sum_{i=1}^n \tau_i$ . 用  $x^*$  表示方程 (1) 的正平衡点, 由定义 1, 可得

$$x^* = \frac{1}{\gamma} \text{Lambert}W\left(\frac{\gamma p}{\mu} e^{-d\tau}\right), \quad (3)$$

$x^*$  依赖于时滞  $\tau$ . 方程 (2) 的线性化系统为

$$x'(t) = -\mu x(t) - \mu \gamma x^* x(t - \tau). \quad (4)$$

若把时滞视为变化的参数, 没有实际的稳定性准则可应用于方程 (4). 把滞量  $\tau$  和常数  $p$  看作是变化的参数, 我们下面研究方程 (2) 的正平衡点  $x^*$  的渐进稳定性的充分必要条件.

方程 (4) 的特征方程为:

$$\Delta(\lambda) = \lambda + \mu + \mu \gamma x^* e^{-\lambda \tau} = 0, \quad (5)$$

假设对某  $\tau$  值, 特征方程 (5) 有一对纯虚根  $\lambda = \pm i\omega$  ( $\omega > 0$ ), 则有

$$-\gamma x^* \cos(\omega \tau) = 1, \quad \mu \gamma x^* \sin(\omega \tau) = \omega, \quad (6)$$

其中  $\pi/2 + 2n\pi < \omega \tau < \pi + 2n\pi$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). 令  $T = \omega \tau$ , 得到方程 (6) 的参数形式:

$$\begin{cases} x^* = -\frac{1}{\gamma \cos T}, \\ \tau = -\frac{T \cos T}{\mu \sin T}. \end{cases} \quad (7)$$

求方程 (6) 关于  $\omega$  的解转化为求方程 (3) 和 (7) 的公共解.

方程 (7) 两边分别关于  $T$  求导, 得

$$\frac{dx^*}{d\tau} = \frac{dx^*/dT}{d\tau/dT} = \frac{\mu(-1 + \cos^2 T) \sin T}{\gamma \cos^2 T(-\cos T \sin T + T)},$$

注意到  $\cos T < 0$  和  $\sin T > 0$ , 因而我们可得  $\frac{dx^*}{d\tau} < 0$ . 因而方程 (7) 在  $(\tau, x^*)$  平面内的曲线族均是单调下降的曲线且不会自相交. 限制参数  $T$  在  $\pi/2 < T < \pi$  的范围内变化. 此时, 由方程 (3) 和方程 (7) 具有公共唯一解的充要条件可被写作关于变量  $p, T$  的方程:

$$\begin{cases} -\frac{1}{\cos T} = \text{Lambert}W\left(\frac{\gamma p}{\mu} \exp \frac{dT \cos T}{\mu \sin T}\right) \\ \frac{\mu(-1 + \cos^2 T) \sin T}{\cos^2 T(-\cos T \sin T + T)} = \frac{-d \text{Lambert}W\left(\frac{\gamma p}{\mu} \exp \frac{dT \cos T}{\mu \sin T}\right)}{1 + \text{Lambert}W\left(\frac{\gamma p}{\mu} \exp \frac{dT \cos T}{\mu \sin T}\right)}. \end{cases} \quad (8)$$

方程 (8) 有唯一解  $(p_0, T_0^*)$ . 从而有下面的定理:

**定理 1** 若  $p < p_0$ , 则特征方程 (5) 没有具零实部的特征根; 若  $p = p_0$ , 则特征方程 (5) 有且只有一对具零实部的特征根; 若  $p > p_0$ , 则特征方程 (5) 有两对具零实部的特征根.

一般地, 对应于变化范围  $\pi/2 + 2n\pi < T < \pi + 2n\pi$ , 参数  $(p_n, T_n^*)$  也可以从方程 (8) 解出 ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

当  $p > p_0$  时, 方程 (3) 和方程 (7) 有公共解  $(\tau_n, x_n^*)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), 并设  $\tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$ . 把特征根  $\lambda(\tau) = \alpha(\tau) \pm \beta(\tau)i$  代入方程 (7) 并分离实部和虚部, 可得

$$-\mu \gamma x^* e^{-\alpha(\tau)\tau} \cos(\beta(\tau)\tau) - \alpha(\tau) = \mu, \quad \mu \gamma x^* e^{-\alpha(\tau)\tau} \sin(\beta(\tau)\tau) - \beta(\tau) = 0 \quad (9)$$

求方程 (9) 在  $\tau_i$  处的导数, 注意到  $\alpha(\tau_i) = 0$ ,  $\beta(\tau_i) = \omega_i$ ,  $x^*(\tau_i) = x_i^*$ , 我们有

$$\begin{aligned}
 & (\mu\gamma x_i^* \cos(\omega_i \tau_i) \tau_i - 1) \frac{d\alpha(\tau_i)}{d\tau_i} + \mu\gamma x_i^* \sin(\omega_i \tau_i) \tau_i \frac{d\beta(\tau_i)}{d\tau_i} + \mu\gamma x_i^* \sin(\omega_i \tau_i) \omega_i = 0, \\
 & -\mu\gamma x_i^* \sin(\omega_i \tau_i) \tau_i \frac{d\alpha(\tau_i)}{d\tau_i} + (\mu\gamma x_i^* \cos(\omega_i \tau_i) \tau_i - 1) \frac{d\beta(\tau_i)}{d\tau_i} + \mu\gamma x_i^* \cos(\omega_i \tau_i) \omega_i = 0,
 \end{aligned} \quad (10)$$

解方程(10),可得

$$\frac{d\alpha(\tau_i)}{d\tau_i} = \frac{\mu\gamma x_i^* \sin(\omega_i \tau_i) \omega_i}{\mu^2 \gamma^2 x_i^{*2} \tau_i^2 - 2\mu\gamma x_i^* \cos(\omega_i \tau_i) \tau_i + 1} > 0,$$

当不考虑滞量时(即  $\tau = 0$ ) ,对任意的  $p \geq 0$  ,方程(2)的正平衡点解是渐进稳定的. 当滞量存在时(即  $\tau > 0$ ) 根据上面的讨论和线性稳定性分析以及 Hopf 分岔定理,得

定理 2 (I) 若  $p < p_0$  ,则正平衡点是全时滞稳定的(或绝对稳定的). 若不然,存在临界值  $\tau_0$  ,使得当  $\tau < \tau_0$  时,平衡点是渐进稳定的,但  $\tau > \tau_0$  时是不稳定的.

(II) 若  $p \geq p_0$  ,在  $\tau = \tau_0$  处发生 Hopf 分岔.

对于  $\tau_i = \tau$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) 的情形可类似地讨论.

## 2 Hopf 分岔

作坐标变换  $\bar{x} = x - x^*$  ,为公式的美观起见,仍然用  $x$  来表示  $\bar{x}$  并把方程(2)展开到 3 阶项,则方程(2)变形为下面的形式:

$$x'(t) = -\mu x(t) - \mu\gamma x^* x(t - \tau) + \frac{1}{2}\mu\gamma^2 x^* x^2(t - \tau) - \frac{1}{6}\mu\gamma^3 x^* x^3(t - \tau) + O(x^4(t - \tau)), \quad (11)$$

选择相空间为  $C = C([- \tau, 0], \mathbf{R})$  ,对任意的  $\varphi \in C$  ,定义  $\|\varphi\| = \sup_{\theta \in [- \tau, 0]} \varphi(\theta)$  . 为研究分岔周期解的稳定性,令  $x_t = x(t + \theta)$  ,  $\theta \in [- \tau, 0]$  ,并把方程(11)改写为算子方程的形式:

$$\frac{dx_t}{dt} = A(a)x_t + Rx_t, \quad (12)$$

其中  $a = \tau - \tau_0$  . 对任意的  $\varphi \in C$  ,算子  $A$  和  $R$  分别定义为

$$A(a)\varphi(\theta) = \begin{cases} \frac{d\varphi}{d\theta}, & -\tau \leq \theta < 0 \\ L\varphi(\theta), & \theta = 0 \end{cases} \quad (13)$$

其中

$$L\varphi(\theta) = -\mu\varphi(0) - \mu\gamma x^* \varphi(-\tau), \quad (14)$$

和

$$R\varphi(\theta) = \begin{cases} 0, & -\tau \leq \theta < 0 \\ \frac{1}{2}\mu\gamma^2 x^* \varphi^2(-\tau) - \frac{1}{6}\mu\gamma^3 x^* \varphi^3(-\tau) + O(\varphi^4(-\tau)), & \theta = 0 \end{cases} \quad (15)$$

对  $\varphi \in C$  ,  $\psi \in C^* = C([0, \tau], \mathbf{R})$  ,定义双线性形式

$$\psi, \varphi = \bar{\psi}(0)\varphi(0) - \int_{\theta=-\tau}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}(\xi - \theta) d\eta(\theta) \varphi(\xi) d\xi,$$

其中的  $d\eta$  定义为

$$d\eta(\theta) = [-\mu\varphi(\theta) - \mu\gamma x^* \varphi(\theta + \tau)]d\theta, \quad (16)$$

为了构造中心流形,对任意的  $\psi \in C^*$  ,定义算子的伴随算子  $A^*$  为

$$A^*(a)\psi(s) = \begin{cases} -\frac{d\psi}{ds}, & 0 < s \leq \tau \\ L^*\psi(s), & s = 0 \end{cases} \quad (17)$$

其中

$$L^*\psi(s) = -\mu\psi(0) - \mu\gamma x^* \psi(\tau),$$

计算可得  $A(0)$  关于特征值  $i\omega$  的一个特征向量基是

$$q(\theta) = e^{i\omega\theta}, \quad -\tau \leq \theta \leq 0. \quad (18)$$

且  $A^*(0)$  关于特征值  $-i\omega$  的一个特征向量基是

$$q^*(\theta) = \frac{1}{1 - \tau\mu\gamma x^* e^{i\omega\tau}} e^{i\omega s}, \quad 0 \leq s \leq \tau. \quad (19)$$

可以验证  $q^*, \bar{q}$  满足正交化条件. 因此任意的  $x_t \in C$  可被写作

$$x_t = zq + \bar{z}\bar{q} + v, \quad (20)$$

其中  $v \in Q_A$ . 由方程(20)我们有

$$z'(t) = q^* x'_t = i\omega z(t) + \bar{q}^*(0) f(z, \bar{z}) = i\omega z(t) + g(z, \bar{z}), \quad (21)$$

$g(z, \bar{z})$  的展开式为

$$g(z, \bar{z}) = g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z\bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21} \frac{z^2 \bar{z}}{2} + \dots,$$

其中的系数  $\{g_{ij}\}$  是常数. 另一方面, 可得

$$\hat{f}(z, \bar{z}) = R(2\mathcal{R}(zq(\theta)) + v),$$

把  $v = u(z, \bar{z})$  展开成级数

$$v = u(z, \bar{z}) = w_{20} \frac{z^2}{2} + w_{11} z\bar{z} + w_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots,$$

从方程(20)我们又可以得到

$$v' = \begin{cases} Au(z, \bar{z}) - 2\mathcal{R}\{\bar{q}^*(0) f(q(\theta))\}, & -\tau \leq \theta < 0 \\ Au(z, \bar{z}) - 2\mathcal{R}\{\bar{q}^*(0) f(q(\theta))\} + f, & \theta = 0 \end{cases} \quad (22)$$

方程(22)的第一个方程可被写作

$$w'(z, \bar{z}) = Au(z, \bar{z}) + H(z, \bar{z}), \quad -\tau \leq \theta < 0 \quad (23)$$

其中

$$H(z, \bar{z}) = H_{20} \frac{z^2}{2} + H_{11} z\bar{z} + H_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots$$

由方程(20)可以计算  $\bar{q}^*(0) f(z, \bar{z})$  和  $g(z, \bar{z})$  的展开式比较, 可得

$$\begin{aligned} g_{20} &= \bar{N}\mu x^* \gamma^2 e^{-2i\omega\tau}, \quad g_{11} = \bar{N}\mu x^* \gamma^2, \\ g_{02} &= \bar{N}\mu x^* \gamma^2 e^{2i\omega\tau}, \quad g_{21} = \bar{N}(\mu x^* \gamma^2 e^{i\omega\tau} w_{20} - \mu x^* \gamma^3 e^{-i\omega\tau} + 2\mu x^* \gamma^2 w_{11} e^{-i\omega\tau}). \end{aligned} \quad (24)$$

与  $H(z, \bar{z})$  的展开式相比, 我们有

$$H_{20} = -g_{20}q(\theta) - \bar{g}_{02}\bar{q}(\theta), \quad H_{11} = -g_{11}q(\theta) - \bar{g}_{11}\bar{q}(\theta). \quad (25)$$

从方程(23)可得

$$(A - 2i\omega)w_{20} = -H_{20}, \quad Aw_{11} = -H_{11}. \quad (26)$$

考虑到算子  $A$  的定义, 由方程(25)(26), 计算可得

$$w_{20} = i \frac{g_{20}}{\omega} e^{i\omega\theta} + i \frac{\bar{g}_{02}}{3\omega} e^{-i\omega\theta} + E_1 e^{2i\omega\theta}, \quad w_{11} = -i \frac{g_{11}}{\omega} e^{i\omega\theta} + i \frac{\bar{g}_{11}}{\omega} e^{-i\omega\theta} + E_2. \quad (27)$$

其中  $E_1, E_2$  由方程(22)的第二个方程确定, 得

$$\begin{aligned} E_1 &= -\frac{3i\mu g_{20} + i\mu \bar{g}_{02} + 3i\mu x^* \gamma g_{20} e^{i\bar{\varepsilon}\tau} + i\mu x^* \gamma \bar{g}_{02} e^{i\bar{\varepsilon}\tau} - 3g_{20}\omega + \bar{g}_{02}\omega + 3\omega \mu x^* \gamma^2 e^{-2i\bar{\varepsilon}\tau}}{3\omega(\mu + \mu x^* \gamma e^{-2i\bar{\varepsilon}\tau} + 2i\omega)}, \\ E_2 &= \frac{i\mu g_{11} - i\mu \bar{g}_{11} + i\mu x^* \gamma g_{11} e^{-i\bar{\varepsilon}\tau} - i\mu x^* \gamma \bar{g}_{11} e^{i\bar{\varepsilon}\tau} - g_{11}\omega - \bar{g}_{11}\omega - \omega \mu x^* \gamma^2}{\mu\omega(1 + x^* \gamma)}, \end{aligned} \quad (28)$$

因而由方程(24)(27)和(28)我们可计算下列的量:

$$\begin{aligned} C_1(0) &= \frac{i}{2\omega} \left( g_{20}g_{11} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{g_{21}}{2}, \\ \hat{\mu} &= -\frac{\mathcal{R}\{C_1(0)\}}{\mathcal{R}\{\lambda'(0)\}}, \quad \kappa = \mathcal{R}\{C_1(0)\}. \end{aligned}$$

其中  $\hat{\mu}$  决定了 Hopf 分岔的方向,且  $\kappa$  决定了分岔周期解稳定性的方向.

方程 (21) 在  $a = 0$  处的普适开折为

$$z' = (\alpha(a) + i\beta(a))z + C_1(a)z^2\bar{z} + O(|z|^4).$$

由第二部分,已知  $\alpha(0) = 0$ ,  $\beta(0) = \omega_0$ . 根据一般的 Hopf 分岔定理,我们有下面的结论:

**定理 3** 当  $p \geq p_0$ ,  $\tau = \tau_0$  时,若  $\hat{\mu} < 0$ , 则 Hopf 分岔是下临界的;若  $\hat{\mu} > 0$ , 则 Hopf 分岔是超临界的. 分岔出的周期解当  $\kappa < 0$  时稳定,但当  $\kappa > 0$  时变为不稳定.

定理 2 和定理 3 表明,若参数  $p$  大于某一个临界值  $p_0$ , 且  $\tau$  位于  $\tau = \tau_0$  附近的某一个邻域内, 则方程 (2) 的周期解存在. 在初值条件  $\varphi(t) = 0.10$ ,  $t \in [-\tau, 0]$  下, 对方程 (2) 作数值模拟. 令参数  $d = 2$ ,  $\mu = 5$ ,  $\gamma = 0.2$ , 通过求解方程 (9) 得到  $p_0 = 372.9417\dots$ . 选择  $p < p_0$ , 则对任意的  $\tau$ , 方程 (2) 的平衡点解是渐进稳定的. 时间序列解和相应的相轨迹解在图 1 中给出. 若  $p \geq p_0$ , 则 Hopf 分岔在某  $\tau_0$  处产生.  $\tau > \tau_0$  时的时间序列解和稳定的周期解相图在图 2 中给出, 前面分析的结果进一步得到了验证.

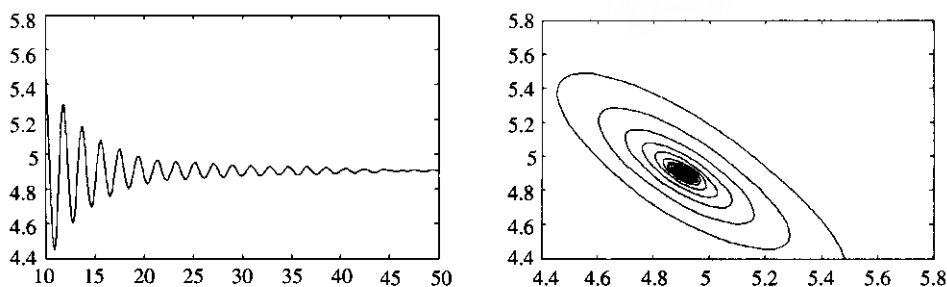


图 1 参数  $p=293$ , 时滞  $\tau=0.75$  时方程 (2) 的时间序列解和相图

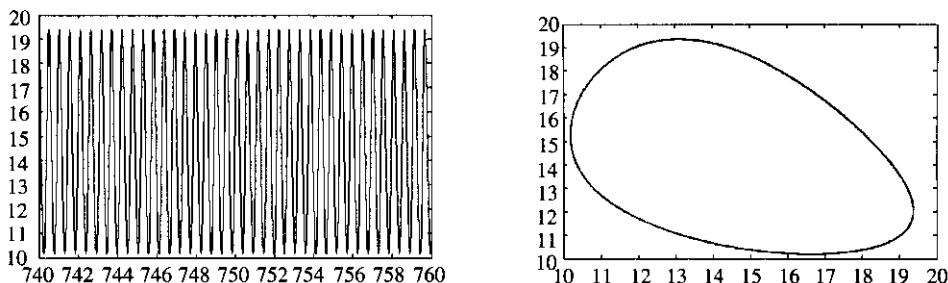


图 2 参数  $p=400$ , 时滞  $\tau=0.115$  时方程 (2) 的时间序列解和相图

## [ 参考文献 ]

- [ 1 ] Ważewska-Czyżewska M, Lasota A. Mathematical problems of the dynamics of the red blood cells system[ J ]. Ann Polish Math Soc Ser III Appl Math, 1976, 6: 23—40.
- [ 2 ] Kulenović S R M, Ladas G. Linearized oscillations in population dynamics[ J ]. Bulletin of Mathematical Biology, 1987, 49: 27—615.
- [ 3 ] Györi I, Ladas G. Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications[ M ]. London: Oxford Univ Press, 1991.
- [ 4 ] Karakostas G, Philos G Ch, Sficas G Y. Stable steady state of some population model[ J ]. J Dynam Differential Equations, 1992, 4: 161—190.
- [ 5 ] Xu J, Chung K W. Effects of time delayed position feedback on a van der Pol-Duffing oscillator[ J ]. Physica D, 2003, 180( 1—2 ): 17—39.

[ 责任编辑: 陆炳新 ]