ϕ-辅助序与 F-型拓扑空间中增映射的不动点定理

徐维艳,方锦暄

(南京师范大学数学与计算机科学学院,210097,江苏,南京)

[摘要] 在 F-型拓扑空间中引入 ϕ-辅助序,讨论其有关性质.在此基础上,证明半序 F-型拓扑空间中增映射的几个不动点定理.作为其应用,得到了概率度量空间中增映射的几个不动点定理.

[关键词] F-型拓扑空间,ϕ-辅助序,上、下完备,增映射,不动点

[中图分类号]O177.99, [文献标识码]A, [文章编号]1001-4616(2005)02-0019-05

ϕ-Auxilliary Order and Fixed Point Theorems of Increasing Mapping in F-Type Topological Space

Xu Weiyan,Fang Jinxuan

(School of Mathematics and Computer Science,Nanjing Normal University,210097,Nanjing,China)

Abstract:In this paper,we introduce the ϕ-auxilliary order in F-type topological spaces and discuss some of its properties. On such a basis,we prove some fixed point theorems of increasing mappings in ordered F-type topological spaces. As their applications,we get the fixed point theorems of increasing mappings in the probabilistic metric spaces.

Key words:F-type topological space,ϕ-auxilliary order,supra-completeness and infra-completeness,increasing mapping,fixed point

0 引言

1976年,Caristi J[1]利用函数 ϕ 在度量空间 X 上定义了一种半序关系 $\leq_\phi$:

$$x \leq_\phi y \Leftrightarrow d(x,y) \leqslant \phi(x) - \phi(y) \text{(我们称 } \leq_\phi \text{ 为 } X \text{ 上的 } \phi\text{-辅助序)},$$

并证明了一个不动点定理,即著名的Caristi不动点定理.文[2]在如上定义的半序度量空间$(X,d,\leq_\phi)$中证明了几个增映射的不动点定理.1996年,方锦暄[3]引入了一类重要的拓扑空间,即 F-型拓扑空间,证明了这样的空间可用一族拟度量来刻画,并利用在 F-型拓扑空间 X 上定义的 ϕ-辅助序 $\leq_\phi$,给出了Caristi不动点定理和Ekeland变分原理在 F-型拓扑空间中的推广.通常的度量空间、Menger概率度量空间[4]、模糊度量空间[5]以及Hausdorff拓扑向量空间都是 F-型拓扑空间的特例[3,6],因此文[3]的结果应用范围广泛.受文[2]启发,本文利用 F-型拓扑空间中的 ϕ-辅助序 $\leq_\phi$,研究了半序 F-型拓扑空间$(X,\{d_\lambda\}_{\lambda\in D},\leq_\phi)$的有关性质,并在这类空间中证明了增映射的几个不动点定理,推广了文[2]的有关结果.作为直接推论,还得到了Menger概率度量空间中增映射的几个不动点定理.

1 F-型拓扑空间上的 ϕ-辅助序及有关性质

定义1 设 X 是 F-型拓扑空间,$\{d_\lambda\}_{\lambda\in D}$ 是它的生成拟度量族($D=(D,<)$是定向集),$K: D\to(0,\infty)$是不增的.对给定的函数 $\phi: X\to \mathbf{R}$,定义 X 上关系 $\leq_\phi$ 如下:

$$x \leq_\phi y \Leftrightarrow d_\lambda(x,y) \leqslant K(\lambda)[\phi(x)-\phi(y)],\ \forall \lambda \in D, \tag{1.1}$$

收稿日期:2004-07-02.

基金项目:江苏省教育厅自然科学基金资助项目(04KJB110061).

作者简介:徐维艳,女,1978—,硕士研究生,主要从事模糊数学的学习与研究.E-mail:xwy_yan@sina.com

通讯联系人:方锦暄,1943—,教授,博士生导师,主要从事模糊数学的教学与研究.E-mail:jxfang@pine.njnu.edu.cn

则 $\le_\phi$ 是 X 上的一偏序[3]. 我们称 $\le_\phi$ 为 X 上的 ϕ- 辅助序.

易见,$x \le_\phi y \Rightarrow \phi(x) \geqslant \phi(y)$

引入了半序 $\le_\phi$ 的 F- 型拓扑空间记为$(X, \{d_\lambda\}_{\lambda\in D}, \le_\phi)$.

定义2　称半序 F- 型拓扑空间$(X, \{d_\lambda\}_{\lambda\in D}, \le_\phi)$ 是上完备的,如果 X 中任一单调递增的柯西序列 $\{x_n\}$ 均收敛,即存在 $x_* \in X$,使$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_*$. 称$(X, \{d_\lambda\}_{\lambda\in D}, \le_\phi)$ 是下完备的,如果 X 中任一单调递减柯西序列 $\{x_n\}$ 均收敛,即存在 $x_* \in X$,使$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_*$. 如果$(X, \{d_\lambda\}_{\lambda\in D}, \le_\phi)$ 既是上完备的,又是下完备的,则称它是序完备的.

注　序列完备的 F- 型拓扑空间$(X, \{d_\lambda\}_{\lambda\in D}, \le_\phi)$ 必是上(下) 完备的,反之不真.

例如,$X = (a,b]$, $a,b \in \mathbf{R}$,定义:$d(x,y) = |x - y|$ $(x,y \in X)$. 则(X,d) 是度量空间. 对每个 $\lambda \in D$,令 $d_\lambda \equiv d$. 显然$(X, \{d_\lambda\}_{\lambda\in D})$ 是 F- 型拓扑空间. 取 $k(\lambda) \equiv 1$,$\phi(x) = -x$,按(1.1) 定义 X 上的 ϕ 辅助序 $\le_\phi$,则 $x \le_\phi y \Leftrightarrow x \leqslant y$. 于是,不难看出,$(X, \{d_\lambda\}_{\lambda\in D}, \le_\phi)$,即$(X,d, \le_\phi)$ 是上完备的,但不是序列完备的.

下面讨论半序 F- 型拓扑空间$(X, \{d_\lambda\}_{\lambda\in D}, \le_\phi)$ 的性质,下文为了书写方便,将 ϕ- 辅助序 $\le_\phi$ 简写为 $\le$.

性质1　设$(X, \{d_\lambda\}_{\lambda\in D}, \le)$ 是上完备的,$\phi: X \to \mathbf{R}$ 有下界,则 X 中任一单调递增序列 $\{x_n\}$ 必有极限 x_*. 且当 ϕ 下半连续时,有 $x_n \le x_*$.

证明　因 $\{x_n\}$ 是 X 中单调递增序列,且 ϕ 有下界,所以由(1.1) 知 $\{\phi(x_n)\}$ 是递减有下界的数列,故 $\{\phi(x_n)\}$ 收敛. 根据柯西收敛准则,$|\phi(x_n) - \phi(x_m)| \to 0$ $(m,n \to \infty)$. 从而,当 $m > n$ 时,对任何 $\lambda \in D$ 有

$$d_\lambda(x_n,x_m) \leqslant k(\lambda)[\phi(x_n) - \phi(x_m)] \to 0 \ (m,n \to \infty) \tag{1.2}$$

这表明 $\{x_n\}$ 是 X 中单调递增的柯西序列. 由 X 的上完备性,存在 $x_* \in X$ 使 $x_n \to x_*(n \to \infty)$.

如果 ϕ 是下半连续的,则$\varliminf\limits_{n\to\infty}\phi(x_n) \geqslant \phi(x_*)$. 因为 $\{d_\lambda\}_{\lambda\in D}$ 是 F- 型拓扑空间 X 的拟度量生成族,所以对任一 $\lambda \in D$,存在 $\mu \in D$,$\mu > \lambda$,使得当 $m > n$ 时有

$$\begin{aligned} d_\lambda(x_n,x_*) &\leqslant d_\mu(x_n,x_m) + d_\mu(x_m,x_*) \\ &\leqslant K(\mu)[\phi(x_n) - \phi(x_m)] + d_\mu(x_m,x_*) \\ &\leqslant K(\lambda)[\phi(x_n) - \phi(x_m)] + d_\mu(x_m,x_*), \end{aligned}$$

在上式中令 $m \to \infty$,得

$$\begin{aligned} d_\lambda(x_n,x_*) &\leqslant K(\lambda) \varlimsup_{m\to\infty} [\phi(x_n) - \phi(x_m)] \\ &= K(\lambda)[\phi(x_n) - \varliminf_{m\to\infty}\phi(x_m)] \leqslant K(\lambda)[\phi(x_n) - \phi(x_*)]. \end{aligned}$$

所以 $x_n \le x_*$.

将性质1 的证明稍作修改,可证得:

性质1′　设$(X, \{d_\lambda\}_{\lambda\in D}, \le)$ 是上完备的,则 X 中任一单调递增有上界的序列 $\{x_n\}$ 必有极限 x_*. 且当 ϕ 下半连续时,有 $x_n \le x_*$.

类似于性质1 和性质1′,可得到:

性质2　设$(X, \{d_\lambda\}_{\lambda\in D}, \le)$ 是下完备的,$\phi: X \to \mathbf{R}$ 有上界,则 X 中任一单调递减序列 $\{x_n\}$ 必有极限 x_*,且当 ϕ 上半连续时,$x_n \ge x_*$.

性质2′　设$(X, \{d_\lambda\}_{\lambda\in D}, \le)$ 是下完备的,则 X 中任一单调递减有下界的序列 $\{x_n\}$ 必有极限 x_*,且当 ϕ 上半连续时,$x_n \ge x_*$.

性质3　在$(X, \{d_\lambda\}_{\lambda\in D}, \le)$ 中,如果 ϕ 是连续的,序列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$、$\{z_n\}$ 满足:

$$x_n \le y_n \le z_n \text{且} \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = x_*,$$

则$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_*$.

证明　由 $x_n \le y_n$ 推得 $\phi(y_n) \leqslant \phi(x_n)$. 再由 $y_n \le z_n$ 推得

$$d_\lambda(y_n,z_n) \leqslant K(\lambda)[\phi(y_n) - \phi(z_n)] \leqslant K(\lambda)[\phi(x_n) - \phi(z_n)], \forall \lambda \in D \tag{1.3}$$

由 ϕ 的连续性及$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = x_*$,在(1.3) 中令 $n \to \infty$,即得

$$\lim_{n\to\infty} d_\lambda(y_n,z_n) = 0, \ \forall \lambda \in D. \tag{1.4}$$

此外,由 F-型拓扑空间的性质知,对每个 $\lambda \in D$,存在 $\mu \in D$,$\mu > \lambda$,使

$$d_\lambda(y_n, x_*) \leqslant d_\mu(y_n, z_n) + d_\mu(z_n, x_*).$$

由 $z_n \to x_*$ 及(1.4),在上式中令 $n \to \infty$,得 $\lim\limits_{n\to\infty} d_\lambda(y_n, x_*) = 0$,($\forall \lambda \in D$),即 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_*$.

性质 4 在 $(X, \{d_\lambda\}_{\lambda \in D}, \preceq)$ 中,ϕ 上半连续,$A \subset X$. 如果 A 有上界 x(即对任何 $a \in A$,恒有 $a \preceq x$),且 A 中有收敛于 x 的点列 $\{x_n\}$,则 $\sup A = x$.

证明 设 y 是 A 的任一上界,显然 y 也是 $\{x_n\}$ 的上界,从而

$$d_\lambda(x_n, y) \leqslant K(\lambda)[\phi(x_n) - \phi(y)], \ \forall \lambda \in D, \ n = 1, 2, \cdots.$$

于是,据 F-型拓扑空间的性质,对每个 $\lambda \in D$,存在 $\mu \in D$,$\mu > \lambda$,使

$$\begin{aligned} d_\lambda(x, y) &\leqslant d_\mu(x, x_n) + d_\mu(x_n, y) \\ &\leqslant d_\mu(x, x_n) + K(\mu)[\phi(x_n) - \phi(y)] \\ &\leqslant d_\mu(x, x_n) + K(\lambda)[\phi(x_n) - \phi(y)]. \end{aligned}$$

注意到 $x_n \to x$ 以及 ϕ 的上半连续性,在上式中令 $n \to \infty$,即得

$$d_\lambda(x, y) \leqslant K(\lambda)[\overline{\lim_{n\to\infty}}\phi(x_n) - \phi(y)] \leqslant K(\lambda)[\phi(x) - \phi(y)], \ \forall \lambda \in D,$$

这表明 $x \preceq y$. 因此 x 是 A 的最小上界,即 $\sup A = x$.

类似地可证得:

性质 5 在 $(X, \{d_\lambda\}_{\lambda \in D}, \preceq)$ 中,ϕ 下半连续,$B \subset X$. 如果 B 有下界 x(即对任何 $b \in B$,恒有 $b \succeq x$),且 B 中有收敛于 x 的点列 $\{x_n\}$,则 $\inf B = x$.

2 F-型拓扑空间中增映射的不动点定理

定义 3 设 $(X, \{d_\lambda\}_{\lambda \in D}, \preceq)$ 是半序 F-型拓扑空间,$f: X \to X$ 是一映射,$x_0 \in X$.

如果对任何 $x, y \in X$,$x \preceq y \Rightarrow f(x) \preceq f(y)$,则称 f 关于 $\preceq$ 是递增的.

如果对 X 中任一收敛于 x_0 的递增(递减)序列 $\{x_n\}$,恒有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$,则称 f 在 x_0 处是左(相应地,右)连续的.

如果 f 在 x_0 处既是左连续的,又是右连续的,则称 f 在 x_0 处是序连续的.

如果 f 在 X 的每一点处左连续,则称 f 在 X 上左连续. 类似地,可定义 f 在 X 上右连续和 f 在 X 上序连续.

定理 2.1 设 $(X, \{d_\lambda\}_{\lambda \in D}, \preceq)$ 是上完备的 F-型拓扑空间,$\phi: X \to \mathbf{R}$ 有下界,映射 $f: X \to X$ 满足如下条件:

(i) f 关于 $\preceq$ 是单调增、左连续的;

(ii) 存在 $x_0 \in X$,使 $x_0 \preceq f(x_0)$,

则 f 有不动点 $\bar{x}$,且迭代序列 $\{x_n = f^n(x_0)\}$ 递增收敛于 $\bar{x}$. 特别地,当 ϕ 下半连续时,$x_n \preceq \bar{x}$ $(n = 1, 2 \cdots)$.

证明 记 $x_n = f^n(x_0) = f(x_{n-1})$,$n = 1, 2 \cdots$,由 $x_0 \preceq f(x_0)$ 及 f 的单增性,得

$$x_0 \preceq x_1 \preceq x_2 \preceq \cdots \preceq x_n \preceq \cdots,$$

即 $\{x_n\}$ 是 X 中的递增序列. 又因 $(X, \{d_\lambda\}_{\lambda \in D}, \preceq)$ 是上完备的,ϕ 有下界,从而由性质 1,存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \bar{x} \in X$,再据 f 的左连续性,我们有

$$f(\bar{x}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \bar{x},$$

即 $\bar{x}$ 是 f 的不动点. 特别地,当 ϕ 下半连续时,由性质 1 知 $x_n \preceq \bar{x}(n = 1, 2, \cdots)$.

注 1 不难看出,上述结果是[2]中定理 1 的推广. 因为我们的定理适用的空间是比度量空间广泛得多的 F-型拓扑空间,对空间完备性和 f 连续性的要求也减弱了,只要求空间"上完备",f"左连续".

类似地,利用性质 2 可以证明:

定理 2.2 设 $(X, \{d_\lambda\}_{\lambda \in D}, \preceq)$ 是下完备的 F-型拓扑空间,$\phi: X \to \mathbf{R}$ 有上界,映射 $f: X \to X$ 满足如下条件:

(i) f 关于 $\preceq$ 是单调增、右连续的;

(ii) 存在 $x_0 \in X$,使 $x_0 \succeq f(x_0)$,

则f有不动点$\underline{x}$，且迭代序列$\{x_n = f^n(x_0)\}$递减收敛于$\underline{x}$. 特别地,当ϕ上半连续时,$x_n \geq \underline{x}(n = 1,2,\cdots)$.

注2　定理2.2是[2]中定理2的推广.

定理2.3　设$(X, \{d_\lambda\}_{\lambda \in D}, \preceq)$是上完备的$F$-型拓扑空间,$\phi: X \to \mathbf{R}$是连续的下有界函数,$f: X \to X$关于$\preceq$是增映射且满足:存在$x_0$,使$x_0 \preceq f(x_0)$,则$f$在$X_0 = \{x \in X \mid x \succeq x_0\}$上有极大不动点$\bar{x}$.

证明　令$\mathscr{F} = \{x \in X_0 \mid x \preceq f(x)\}$，显然$x_0 \in \mathscr{F}$,故$\mathscr{F} \neq \varnothing$. 设$F$是$\mathscr{F}$的任一全序子集. 由(1.1)知,对任何$x,y \in F$,$x \preceq y \Rightarrow \phi(y) \leqslant \phi(x)$. 所以$\phi$是$F$上的递减函数. 注意到$\phi$是下有界的,故存在下确界$\inf\limits_{x \in F}\phi(x) = \gamma$. 于是,存在点列$\{x_n\} \subset F$,使$\phi(x_n) \searrow \gamma$. 显然$\{x_n\}$是递增的(因$\phi$递减),从而由性质1知,存在极限$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = z$,且由$\phi$的连续性知$x_n \preceq z\ (n = 1,2,\cdots)$,$\phi(z) = \gamma$.

下证z是F的上界,即要证$\forall y \in F$, $y \preceq z$. 我们对$y \in F$分以下两种情形讨论:

(a) 存在某个n_0使$y \preceq x_{n_0}$. 此时,显然有$y \preceq z$.

(b) $\forall n$, $x_n \preceq y$, $x_n \neq y$. 则我们有$\gamma \leqslant \phi(y) < \phi(x_n) \to \gamma$,由此推得$\phi(y) = \gamma = \phi(z)$. 另一方面,对任何$\lambda \in D$,存在$\mu \in D$,$\mu > \lambda$,使得

$$d_\lambda(z,y) \leqslant d_\mu(z,x_n) + d_\mu(x_n,y) \leqslant d_\mu(z,x_n) + K(\mu)[\phi(x_n) - \phi(y)]$$

在上式中令$n \to \infty$，得$d_\lambda(z,y) = 0$, $\forall \lambda \in D$，即$y = z$. 因此z是F的上界.

据Zorn引理,$\mathscr{F}$有极大元$\bar{x}$. 由$\bar{x} \in \mathscr{F}$知,$x_0 \preceq \bar{x} \preceq f(\bar{x})$. 由$f$的单调递增性推得$x_0 \preceq f(\bar{x}) \preceq f(f(\bar{x}))$，即知$f(\bar{x}) \in \mathscr{F}$. 于是,由$\bar{x}$极大性得$f(\bar{x}) = \bar{x}$，即$\bar{x}$是$f$的不动点,且是极大不动点.

类似地有

定理2.4　设$(X, \{d_\lambda\}_{\lambda \in D}, \preceq)$是下完备的$F$-型拓扑空间，$\phi: X \to \mathbf{R}$是连续的上有界函数,$f: X \to X$关于$\preceq$是增映射且满足:存在$x_0$,使$x_0 \succeq f(x_0)$，则$f$在$X_0 = \{x \in X \mid x \preceq x_0\}$上有极小不动点$\underline{x}$.

注3　定理2.3和定理2.4分别是[2]中定理3和定理4的推广.

3　应用

本节,我们将利用上节得到的结果来建立Menger概率度量空间中增映射的不动点定理. 先介绍有关概念.

映射$F: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+ = [0,\infty)$称为分布函数,如果它是不减的、左连续,且$\inf F(t) = 0$, $\sup F(t) = 1$. $\mathscr{D}$表示所有分布函数组成的集合,H是一个特殊的分布函数，定义为:

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

定义4　我们称三元组$(X,\mathscr{F},\triangle)$为Menger概率度量空间,其中$X$是非空集,$\triangle$是一个$t$-范数，$\mathscr{F}$是从$X \times X$到$\mathscr{D}$的映射(记$\mathscr{F}(x,y) = F_{x,y}$)，满足:

(PM-1) $F_{x,y}(t) = 1, \forall t > 0 \Leftrightarrow x = y$;

(PM-2) $F_{x,y}(0) = 0$;

(PM-3) $F_{x,y}(t) = F_{y,x}(t), \forall t \in \mathbf{R}$;

(PM-4) $F_{x,z}(t_1 + t_2) \geqslant \triangle(F_{x,y}(t_1), F_{y,z}(t_2))$, $\forall x,y,z \in X$, $t_1,t_2 \geqslant 0$.

[3]中已证明:如果t-范数满足$\sup\limits_{0<t<1}\triangle(t,t) = 1$，则Menger概率度量空间$(X,\mathscr{F},\Delta)$关于它的$(\varepsilon,\lambda)$-拓扑是一个$F$-型拓扑空间. 对每个$\lambda \in D = (0,1)$,定义

$$d_\lambda(x,y) = \inf\{t > 0 \mid F_{x,y}(t) > 1 - \lambda\}, \ (x,y) \in X \times X. \tag{3.1}$$

D中的半序$<$定义为:$\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \geqslant \beta$. 显然，$\{d_\lambda \mid \lambda \in D\}$是$F$-型拓扑空间$(X,\mathscr{F},\Delta)$的生成拟度量族.

定理3.1　设$(X,\mathscr{F},\triangle)$是上完备的Menger概率度量空间,$\Delta$满足$\sup\limits_{0<t<1}\triangle(t,t) = 1$. $\phi: X \to \mathbf{R}$是有下界的函数,定义X上的偏序$\preceq$如下:

$$\forall x, y \in X, x \preceq y \Leftrightarrow F_{x,y}(\phi(x) - \phi(y) + o) = 1. \tag{3.2}$$

又设映射$f: X \to X$满足如下条件:

(i) f关于$\preceq$是单调增、左连续的;

（ii）存在$x_0 \in X$，使$x_0 \leq f(x_0)$，

则f有不动点$\bar{x}$，且迭代序列$\{x_n = f^n(x_0)\}$递增地收敛于$\bar{x}$. 特别地，当ϕ下半连续时，$x_n \leq \bar{x}$ $(n = 1,2,\cdots)$.

证明　不难证明：

$$F_{x,y}(\phi(x) - \phi(y) + o) = 1 \Leftrightarrow d_\lambda(x,y) \leqslant \phi(x) - \phi(y),\ \forall \lambda \in (0,1). \tag{3.3}$$

事实上，若$F_{x,y}(\phi(x) - \phi(y) + o) = 1$，则我们有

$$F_{x,y}(\phi(x) - \phi(y) + \varepsilon) > 1 - \lambda,\ \forall \varepsilon > 0, \lambda \in (0,1).$$

由(3.1)得$d_\lambda(x,y) \leqslant \phi(x) - \phi(y) + \varepsilon$. 从而有$d_\lambda(x,y) \leqslant \phi(x) - \phi(y)$，$\forall \lambda \in (0,1)$.

反之，若$d_\lambda(x,y) \leqslant \phi(x) - \phi(y)$，$\forall \lambda \in (0,1)$，则由(3.1)知，$\forall \varepsilon > 0$，存在$0 < t < \phi(x) - \phi(y) + \varepsilon$使$F_{x,y}(t) > 1 - \lambda$. 于是，我们有$F_{x,y}(\phi(x) - \phi(y) + \varepsilon) > 1 - \lambda$. 由$\varepsilon$和$\lambda$的任意性，即得$F_{x,y}(\phi(x) - \phi(y) + o) = 1$，(3.3)得证.

由(3.2)和(3.3)知，这里定义的$\leq$就是(1.1)意义下的ϕ-辅助序(这里$K(\lambda) \equiv 1$). 因此，容易看出在此定理的条件下，Menger概率度量空间$(X, \mathscr{F}, \triangle)$是半序$F$-型拓扑空间$(X, \{d_\lambda\}_{\lambda \in (0,1)}, \leq)$，其中$d_\lambda$由(3.1)定义. 且定理2.1的条件均满足. 故本定理的结论可由定理2.1直接推得.

类似地，由定理2.2、2.3和2.4可分别推得下面的定理3.2、3.3和3.4.

定理3.2　设$(X,\mathscr{F},\triangle)$是下完备的Menger概率度量空间，$\Delta$满足$\sup\limits_{0<t<1} \triangle(t,t) = 1$，$\phi: X \to (0,+\infty)$是有上界的函数，$\leq$是$X$上由(3.2)定义的偏序. 又设映射$f: X \to X$满足如下条件：

（i）f关于$\leq$是单调增、右连续的；

（ii）存在$x_0 \in X$，使$x_0 \geq f(x_0)$，

则f有不动点$\underline{x}$，且迭代序列$\{x_n = f^n(x_0)\}$递减地收敛于$\underline{x}$. 特别地，当ϕ上半连续时，$x_n \geq \underline{x}$ $(n = 1,2,\cdots)$.

定理3.3　设$(X,\mathscr{F},\triangle)$是上完备的Menger概率度量空间，$\Delta$满足$\sup\limits_{0<t<1} \triangle(t,t) = 1$，$\phi: X \to (0,+\infty)$是连续、下有界的函数，$\leq$是$X$上由(3.2)定义的偏序. 又设$f: X \to X$是关于$\leq$的增映射，且满足存在$x_0$，使$x_0 \leq f(x_0)$，则$f$在$X_0 = \{x \in X \mid x \geq x_0\}$上有极大不动点$\bar{x}$.

推论3.4　设$(X,\mathscr{F},\triangle)$是下完备的Menger概率度量空间，$\Delta$满足$\sup\limits_{0<t<1} \triangle(t,t) = 1$，$\phi: X \to (0,+\infty)$是连续、上有界的函数，$\leq$是$X$上由(3.2)定义的偏序. 又设$f: X \to X$是关于$\leq$的增映射且满足存在$x_0$，使$x_0 \geq f(x_0)$，则$f$在$X_0 = \{x \in X \mid x \leq x_0\}$上有极小不动点$\underline{x}$.

注4　类似于本节的方法，利用定理2.1～2.4，还可以在模糊度量空间中相应地建立增映射的不动点定理.

[参考文献]

[1] Caristi J. Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions[J]. Trans Amer Math Soc, 1976, 215: 241—251.

[2] 张宪. 半序度量空间中单调映射的不动点定理及混合单调映射的耦合不动点定理[J]. 数学学报, 2001, 44(4): 641—646.

[3] Fang Jinxuan. The variational principle and fixed point theorems in certain topological spaces[J]. J Math Anal Appl, 1996, 202: 398—412.

[4] Schweizer B, Sklar A. Probabilistic Metric Spaces[M]. Amsterdam: North-Holland, 1983.

[5] Kaleva O, Seikkala S. On fuzzy metric spaces[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1984, 12: 215—229.

[6] Li Junhua, Fang Jinxuan. On the variational principle and fixed point theorem in F-type topological spaces[J]. 南京大学学报(数学半年刊), 1998, 15(2): 290—294.

[责任编辑：陆炳新]