关于族$\mathscr{F}$混合的研究

曹毅[1], 杨润生[2]

(1. 江苏技术师范学院基础部, 213015, 江苏, 常州)
(2. 南京师范大学数学与计算机科学学院, 210097, 江苏, 南京)

[摘要] 本文主要对族$\mathscr{F}$混合作了研究. 着重于对族$\mathscr{F}$混合的等价条件的研究和族$\mathscr{F}$混合以及保测变换的强族$\mathscr{F}$混合与存在熊意义下的混沌子集关系的研究.

[关键词] 族$\mathscr{F}$混合,混沌,概率测度,因子映射,逆极限空间

[中图分类号]O189.3, [文献标识码]A, [文章编号]1001-4616(2005)03-0015-05

Study on the $\mathscr{F}$-Mixing

Cao Yi[1], Yang Runsheng[2]

(1. Department of Basic Science, Jiangsu Teachers College of Technology, 213015, Changzhou, China)
(2. School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, 210097, Nanjing, China)

Abstract: This paper mainly researchs on the $\mathscr{F}$-mixing with respect to a family $\mathscr{F}$, devoted to studying the equivalent conditions of the $\mathscr{F}$-mixing and the relationships between the chaotic in the sence of Xiong and the $\mathscr{F}$-mixing, the strong $\mathscr{F}$-mixing of a measure-preserving transformation of a Borel probability space.

Key words: *$\mathscr{F}$-mixing, chaotic subset, probability measure, factor map, inverse limit space*

0 引言

动力系统(X,f)是无限的紧致度量空间(X,d)连同连续满射$f:X\to X$. 而族$\mathscr{F}$回归是拓扑动力系统中的一个重要部分. 1981 年 Hillel Furstenberg 在[1]中用$\mathbf{Z}$或$\mathbf{Z}_+$的子集族刻画了x的轨道进入邻域的情况,从而提出了族$\mathscr{F}$的概念. 而 E. Akin[2] 进一步研究了族$\mathscr{F}$回归的性质. 本文主要对族$\mathscr{F}$混合作了研究. 将文[3]的有关拓扑双重遍历的性质推广到了族$\mathscr{F}$混合上. 同时对于保测变换给出了族$\mathscr{F}$遍历和族$\mathscr{F}$强混合的定义,讨论了它与熊意义下混沌的关系,推广了文[5]中的关于混合变换的相关结果.

1 定义及引理

令$\mathbf{Z}_+$表示非负整数集合,$\mathscr{P}$表示$\mathbf{Z}_+$的幂集,$\mathscr{P}_+=\mathscr{P}\setminus\{\varnothing\}$. 如$\mathscr{F}$为满足以下性质的$\mathscr{P}$的子集:$F_1\subset F_2$, 且$F_1\in\mathscr{F}\Rightarrow F_2\in\mathscr{F}$,则称$\mathscr{F}$为一子集族. 如$\mathscr{F}$为一族,其对偶$\mathscr{K}\mathscr{F}=\{F\in\mathscr{P}\mid F\cap F_1\neq\varnothing$, 对所有$F_1\in\mathscr{F}\}$是一族. 对于任意的族$\mathscr{F}$, $\mathscr{K}\mathscr{K}\mathscr{F}=\mathscr{F}$. 对于$i\in\mathbf{Z}_+$,令$g^i:\mathbf{Z}_+\to\mathbf{Z}_+$, $g^i(j)=i+j$,称g^i为平移映射. 若$\mathscr{F}$为一族,对于任意$i\in\mathbf{Z}_+$,及任意$F\in\mathscr{F}$, $g^{-i}(F)=\{j\in\mathbf{Z}_+\mid i+j\in F\}\in\mathscr{F}$, 称$\mathscr{F}$为平移不变族. 令$\mathscr{F}=\{F\in\mathscr{P}\mid$ 对$\mathbf{Z}_+$的任意有限族$\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$, $g^{-i_1}(F)\cap g^{-i_2}(F)\cap\cdots\cap g^{-i_k}(F)\in\mathscr{F}\}$. 若$\mathscr{K}\mathscr{B}\cdot\mathscr{F}=\{A\cap F\mid A\in\mathscr{K}\mathscr{B}, F\in\mathscr{F}\}\subset\mathscr{F}$,则称真族$\mathscr{F}$为全族.

令X为拓扑空间,$f:X\to X$连续,$\mathscr{F}$为一族,对于X的任意非空开集U,V,若$N_f(U,V)=\{n\in\mathbf{Z}_+\mid f^n(V)\cap U\neq\varnothing\}\neq\phi$,则称$f$拓扑可迁. 若$N_f(U,V)\in\mathscr{F}$,则称$f$为族$\mathscr{F}$可迁. 如$f\times f$为族$\mathscr{F}$可迁的,则称$f$是族$\mathscr{F}$混合的. X为拓扑空间,$f:X\to X$连续映射,设$\{n_i\}$为一正整数的递增序列. 如果对于X上的任

收稿日期: 2004-06-25.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10271057).
作者简介: 曹毅,女,1978—,助教,主要从事拓扑动力系统方向的学习与研究. E-mail: cyy7812@sina.com
通讯联系人: 杨润生,1942—,教授,主要从事拓扑动力系统方向的教学与研究. E-mail: rshynj@sina.com

万方数据

意非空开集 U,V,存在 $i>0$,使得 $f^{n_i}(U)\cap V\neq\varnothing$,则称 f 关于序列 $\{n_i\}$ 可迁[4].

若 ϕ 是满足条件 $g\circ\phi=\phi\circ f$ 的连续满射,则称 ϕ 为因子映射,称 (Y,g) 为 (X,f) 的因子.

设 $(X_i,d_i),i\in\mathbf{N}$ 为紧致度量空间,$g_i:X_{i+1}\to X_i$ 为连续映射,令 $X_\infty=\underleftarrow{\lim}\{X_i,g_i\}=\{(x_1,x_2,\cdots)\mid x_i\in X_i,g_i(x_{i+1})=x_i,i\in\mathbf{N}\}$,称 X_∞ 为由 $\{X_i,g_i\}$ 生成的逆极限空间. 如果 $f_i:X_i\to X_i$ 连续,且 $g_i\circ f_{i+1}=f_i\circ g_i,i\in\mathbf{N}$,则 $\{f_i\}$ 诱导了 X_∞ 上的映射 f_∞,$f_\infty(x_1,x_2,\cdots)=(f_1(x_1),f_2(x_2),\cdots)$,称 (X_∞,f_∞) 为由 $\{X_i,g_i,f_i\}_{i=1}^\infty$ 生成的逆极限系统.

设 X 为拓扑空间,$f:X\to X$ 连续,若 C 为 X 的子集,S 为 $\mathbf{Z}_+$ 的无限子集,如对于 C 的任意子集 A 和任意连续映射 $g:A\to X$,存在递增无限序列 $\{q_i\}\subset S$,使得对于 $\forall x\in A$,$\lim\limits_{i\to\infty}f^{q_i}(x)=g(x)$,则称 C 为相对于数集 S 熊意义混沌的[5].

令 $(X,\mathscr{B},\mu)$ 是一测度空间,设 $f:X\to X$ 是 $(X,\mathscr{B},\mu)$ 的一保测变换. 如果对于 $\forall A,B\in\mathscr{B}$,及 $\forall\{n_i\}\in\mathscr{F}$,有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\mu(A\cap f^{-n_i}(B))=\mu(A)\mu(B),$$

则称 f 关于族 $\mathscr{F}$ 遍历. 如 $\mathscr{F}=\{\mathbf{Z}_+\}$ 即为通常意义下的遍历. 如果对于 $\forall A,B\in\mathscr{B}$,以及 $\forall\{n_i\}\in\mathscr{F}$,$\lim\limits_{i\to\infty}\mu(A\cap f^{-n_i}(B))=\mu(A)\mu(B)$,称 f 族 $\mathscr{F}$ 强混合. 如 $\mathscr{F}=\{\mathbf{Z}_+\}$ 即为通常意义下的强混合;如 $\mathscr{F}$ 为密度为1的集族,即为通常意义下的弱混合[6].

引理1　设 f 是紧致度量空间 X 上的连续自映射,则下列条件等价:

(1) f 关于族 $\mathscr{F}$ 可迁.

(2) $\forall\{l_i\}\in\mathscr{K}\mathscr{F}$,使得 f 关于序列 $\{l_i\}$ 可迁.

(3) $\forall\{l_i\}\in\mathscr{K}\mathscr{F}$,$\{x\mid\{f^{l_i}(x),i\geqslant1\}$ 在 X 中稠密$\}$ 是一个稠密的 G_δ-集.

证明　(1) $\Rightarrow$ (2). 族 $\mathscr{F}$ 可迁,即对于 X 的任意非空开集 U,V,$N_f(U,V)\in\mathscr{F}$. 因为 $\{l_i\}\in\mathscr{K}\mathscr{F}$,所以 $\{l_i\}\cap N_f(U,V)\neq\varnothing$,存在 $l'\in\{l_i\}\cap N_f(U,V)$,使得 $f^{l'}(U)\cap V\neq\varnothing$. 因此 f 关于序列 $\{l_i\}$ 可迁.

(2) $\Rightarrow$ (3) 如果 $\{U_n\}_1^\infty$ 是一组拓扑基,则

$$\{x\mid\{f^{l_i}(x)\}_{i=1}^\infty\text{ 是稠密的}\}=\bigcap_{n=1}^\infty\bigcup_{i=1}^\infty f^{-l_i}(U_n)$$

因为对于 $\forall\{l_i\}\in\mathscr{K}\mathscr{F}$,$f$ 关于序列 $\{l_i\}$ 可迁. 由此对于 $\forall n\in\mathbf{N}$,$\bigcup\limits_{i=1}^\infty f^{-l_i}(U_n)$ 是稠密的,所以结论成立.

(3) $\Rightarrow$ (1). 设 U,V 是非空开集,由(3)可知,对于 $\forall\{l_i\}\in\mathscr{K}\mathscr{F}$,存在 $x\in U$,使得 $\{f^{l_i}(x);i\geqslant1\}$ 在 X 中稠密,这蕴含着 $f^{l_i}(U)\cap V\neq\varnothing$,对于某个 $i>0$. 所以对于 $\forall\{l_i\}\in\mathscr{K}\mathscr{F}$,$N_f(U,V)\cap\{l_i\}\neq\varnothing$,$N_f(U,V)\in\mathscr{K}(\mathscr{K}\mathscr{F})=\mathscr{F}$,$f$ 关于序列 $\{l_i\}$ 可迁.

引理2[2]　$\mathscr{F}$ 为全族,则有 $\mathscr{F}$ 混合 $\Leftrightarrow\tau\mathscr{F}$ 可迁.

注　由引理1和引理2可见:若 $\mathscr{F}$ 为全族,则 (X,f) 族 $\mathscr{F}$ 混合 $\Leftrightarrow\forall\{l_i\}\in\mathscr{K}\tau\mathscr{F}$,使得 f 关于序列 $\{l_i\}$ 可迁.

引理3　令 f 是概率空间 $(X,\mathscr{B},\mu)$ 的保测变换,则对于 $\forall m\in\mathbf{N}$,f 族 $\mathscr{F}$ 强混合的充要条件为 $f^{(m)}=f\times f\times\cdots\times f$ 族 $\mathscr{F}$ 强混合.

证明　"$\Leftarrow$" $f^{(m)}$ 族 $\mathscr{F}$ 强混合,对于 $\forall A,B\in\mathscr{B}$,$\forall\{n_i\}\in\mathscr{F}$,有 $\lim\limits_{i\to\infty}\mu(A\cap f^{-n_i}(B))=\lim\limits_{i\to\infty}\mu\times\mu\times\cdots\times\mu[(A\times X\times\cdots\times X)\cap(f\times f\times\cdots\times f)^{-n_i}(B\times X\times\cdots\times X)]=\mu(A)\mu(B)$,所以 f 族 $\mathscr{F}$ 强混合.

"$\Rightarrow$" f 族 $\mathscr{F}$ 强混合,则对于 $\forall A,B\in\mathscr{B}$,及任一序列 $\{n_i\}\in\mathscr{F}$,有 $\lim\limits_{i\to\infty}\mu(A\cap f^{-n_i}(B))=\mu(A)\mu(B)$. 取任意 $A_1,A_2,\cdots,A_m,B_1,B_2,\cdots,B_m\in\mathscr{B}$,$\lim\limits_{i\to\infty}\mu\times\mu\times\cdots\times\mu[(A_1\times A_2\times\cdots\times A_m)\cap(f\times f\times\cdots\times f)^{-n_i}(B_1\times B_2\times\cdots\times B_m)]=\lim\limits_{i\to\infty}\mu(A_1\cap f^{-n_i}(B_1))\mu(A_2\cap f^{-n_i}(B_2))\cdots\mu(A_m\cap f^{-n_i}(B_m))=\mu(A_1)\mu(B_1)\mu(A_2)\mu(B_2)\cdots\mu(A_m)\mu(B_m)=\mu\times\mu\times\cdots\times\mu(A_1\times A_2\times\cdots\times A_m)\mu\times\mu\times\cdots\times\mu(B_1\times B_2\times\cdots\times B_m)$,所以 $f^{(m)}$ 族 $\mathscr{F}$ 强混合.

引理4　设 $f:X\to X$ 是概率空间 $(X,\mathscr{B},\mu)$ 的一保测变换,且 f 族 $\mathscr{F}$ 遍历,对于 $\forall A\in\mathscr{B}$,若有 $\mu(A)>0$,则对于 $\forall\{n_i\}\in\mathscr{F}$,有 $\mu(\bigcup\limits_{i=1}^\infty f^{-n_i}(A))=1$.

万方数据

证明 假设$A \in \mathscr{B}$,且$\mu(A) > 0$. 取$\tilde{A} = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{n_i}(A)$和$B = X - \tilde{A}$. 如果$\mu(\tilde{A}) \neq 1$,则$\mu(B) > 0$,对于每个$i > 0$,$B \cap f^{n_i}(A) = \varnothing$,我们有

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \mu(B \cap f^{n_i}(A)) = 0 \neq \mu(A)\mu(B).$$

由于$\mu(A)\mu(B) > 0$. 与f族$\mathscr{F}$遍历矛盾.

引理5 X为拓扑空间,C为X的有限子集,$f:X \to X$连续,则C为相对于$\mathbf{Z}_+$的无限子集S的熊意义下的混沌集的充要条件是对于任意连续映射$g:C \to X$,存在无限递增序列$\{p_i\} \subset S$,使得对于$\forall x \in C$,$\lim_{i\to\infty} f^{p_i}(x) = g(x)$.

证明 "$\Rightarrow$"显然.

"$\Leftarrow$"对于C的任一子集A及任意连续映射$F:A \to X$,因为C为有限子集,因此存在F的连续开拓$\tilde{F}:C \to X$,使得$\tilde{F}|_A = F$. 于是存在无限递增序列$\{p_i\} \subset S$,使得$\forall x \in A \subset C$,$\lim_{i\to\infty} f^{p_i}(x) = \tilde{F}(x) = F(x)$,因此$C$是相对于$S$的熊意义下的混沌集.

2 定理

定理1 $\mathscr{F}$是平移不变族,则f族$\mathscr{F}$混合当且仅当对于任意非空开集U,V,存在$J \in \mathscr{F}$,使得$\forall n \in J$,$f^n(U) \cap U \neq \varnothing$和$f^n(U) \cap V \neq \varnothing$同时成立,即$N_f(U,U) \cap N_f(U,V) \in \mathscr{F}$.

证明"$\Rightarrow$"显然.

"$\Leftarrow$"对于任意非空开集U_1,U_2,U_3,U_4,由假设存在$t_1 \in \mathbf{N}$,使得$V_1 = f^{t_1}(U_1) \cap U_2 \neq \varnothing$,存在$t_2 \in \mathbf{N}$,$V_2 = f^{t_2}(U_1) \cap f^{t_1}(U_3) \neq \varnothing$. 存在$J' \in \mathscr{F}$,使得$\forall t_3 \in J'$,$f^{t_3}(V_2) \cap V_2 \neq \varnothing$和$f^{t_3}(V_2) \cap V_4 \neq \varnothing$. 令$J = \{t \in \mathbf{N} \mid t - t_2 \in J'\}$. 因为$\mathscr{F}$是平移不变族,所以$J \in \mathscr{F}$. $\forall t \in J$,存在$t_3 \in J'$,使得$t = t_2 + t_3$,所以$f^{t_1}(f^t(U_1) \cap U_3) = f^{(t_1+t)}(U_1) \cap f^{t_1}(U_3) \supset f^{(t_1+t)}(U_1) \cap f^t(U_2) \cap f^{t_1}(U_3) = f^t(f^{t_1}(U_1) \cap U_2) \cap f^{t_1}(U_3) = f^t(V_1) \cap f^{t_1}(U_3) \supset f^{t_3}(V_2) \cap f^{t_1}(U_3) \supset f^{t_3}(V_2) \cap V_2 \neq \varnothing$,从而,$f^t(U_1) \cap U_3 \neq \varnothing$,而$f^t(U_2) \cap U_4 \supset f^{(t_1+t)}(U_1) \cap f^t(U_2) \cap U_4 = f^t(f^{t_1}(U_1) \cap U_2) \cap U_4 = f^t(V_1) \cap U_4 \supset f^{t_3}(V_2) \cap U_4 \neq \varnothing$,所以$f$是族$\mathscr{F}$混合的.

在文[3]中讨论了:若f是拓扑双重遍历,当且仅当对于任意非空开集U,V,存在正上密度集$J \subset \mathbf{N}$,使得$\forall n \in J$,$f^n(U) \cap U \neq \varnothing$和$f^n(U) \cap V \neq \varnothing$同时成立. 显然本文的定理1是以上结论的一个推广

定理2 若族$\mathscr{F}$是平移不变族,则以下性质等价.

(1) f是族$\mathscr{F}$混合的.

(2) 对于$\forall n \geqslant 2$,n重积$f^{(n)} = f \times f \times \cdots \times f$是族$\mathscr{F}$可迁的.

(3) 对于$\forall n \geqslant 2$,$f^{(n)}$是族$\mathscr{F}$混合的.

(4) 对于$\forall \varepsilon > 0$,及任意非空开集U,存在$J \in \mathscr{F}$,使得$\forall n \in J$,$f^n(U)$在X中ε稠密.

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 令$U_1,U_2,\cdots,U_n,V_1,V_2,\cdots,V_n$为$X$的任意非空开集,则

$$N_{f^{(n)}}(V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n, U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n) = \bigcap_{i=1}^{n} N_f(V_i,U_i).$$

因为f是族$\mathscr{F}$混合的,$J_2 = N_{f\times f}(V_1 \times U_1, V_2 \times U_2) = N_f(V_1,V_2) \cap N_f(U_1,U_2) \in \mathscr{F}$. 任取$l \in J_2$,令$U = f^l(U_2) \cap U_1 \neq \varnothing$,$V = f^l(V_2) \cap V_1 \neq \varnothing$,所以$J_1 = N_f(V,U) \in \mathscr{F}$.

任取$m \in J_1$,$f^m(U_1) \cap V_1 \supset f^m(U) \cap V \neq \varnothing$,$f^m(U_2) \cap V_2 \supset f^m(f^l(U)) \cap f^l(V) \supset f^l(f^m(U) \cap V) \neq \varnothing$,于是$N_f(V_1,U_1) \cap N_f(V_2,U_2) \supset N_f(V,U)$,$\bigcap_{i=1}^{n} N_f(V_i,U_i) \supset N_f(V,U) \cap (\bigcap_{i=3}^{n} N_f(V_i,U_i))$.

重复以上过程即知,存在非空开集$\tilde{U},\tilde{V}$,使得$\bigcap_{i=1}^{n} N_f(V_i,U_i) \supset N_f(\tilde{V},\tilde{U}) \in \mathscr{F}$. $f^{(n)} = f \times f \times f \times \cdots\cdots \times f$是族$\mathscr{F}$可迁的.

(2) $\Rightarrow$ (3). 由$f^{(n)} \times f^{(n)}$族$\mathscr{F}$可迁,即知$f^{(n)}$是族$\mathscr{F}$混合的.

(3) $\Rightarrow$ (4). $\forall \varepsilon > 0$,存在m个$\frac{\epsilon}{2}$开球,$\{B_1,B_2,\cdots,B_m\}$构成X的开覆盖.

因为$f^{(m)} = f \times f \times \cdots \times f$族$\mathscr{F}$可迁,所以对于任意非空开集$U$,

万方数据

$$S = N_{f(m)}(B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_m, U \times U \times \cdots \times U) \in \mathscr{F},$$

$\forall n \in S, \forall i \in \{1,2,\cdots,m\}, f^n(U) \cap B_i \neq \varnothing$. 即 $\forall n \in S, f^n(U)$ 在 X 中 ϵ 稠密.

(4) $\Rightarrow$ (1). 任取 X 的非空开集 U,V,则存在 $\epsilon > 0$,使得 U 和 V 各包含一直径为 ϵ 的开球 B_1 和 B_2. 由条件知,存在 $J \in \mathscr{F}$,使得 $\forall n \in J, f^n(U)$ 在 X 中 ϵ 稠密,从而 $f^n(U) \cap U \supset f^n(U) \cap B_1 \neq \varnothing, f^n(U) \cap V \supset f^n(U) \cap B_2 \neq \varnothing$. 由定理1知 f 是族 $\mathscr{F}$ 混合的.

定理2是文[3]中引理2的自然推广,由以上证明可见,由 (1) $\Rightarrow$ (2),(2) $\Rightarrow$ (3),(3) $\Rightarrow$ (4) 均不需要族 $\mathscr{F}$ 是平移不变族的条件.

定理3　若 f 是族 $\mathscr{F}$ 混合,则对于 X 的任意非空开集 U,V 及任意 $m \in \mathbf{N}$, 存在 $J_m \in \mathscr{F}, J_1 \supset J_2 \supset \cdots \supset J_m \supset \cdots$,使得 $N_f(V,U) \supset \{[l,l+m-1] \cap \mathbf{N} \mid l \in J_m\}$.

证明　令 $U_i = f^i(U), V_i = V, i = 0,1,2,\cdots,m-1$,则因为 f 是族 $\mathscr{F}$ 混合的,由定理1知 $J_m = \bigcap_{i=0}^{m-1} N_f(V_i,U_i) \in \mathscr{F}$ 且若 $m' < m$,则 $J_m \subset J_{m'}$. $\forall l \in J_m, \forall i \in \{0,1,2,\cdots,m-1\}, f^l(U_i) \cap V_i = f^l(f^i(U)) \cap V = f^{(l+i)}(U) \cap V \neq \varnothing$,所以 $N_f(V,U) \supset \{[l,l+m-1] \cap \mathbf{N} \mid l \in J_m\}$.

定理4　族 $\mathscr{F}$ 是平移不变族,若 (X,f) 族 $\mathscr{F}$ 混合,则其因子也是族 $\mathscr{F}$ 混合的.

证明　设 $\phi:(X,f) \to (Y,g)$ 是因子映射,$g \circ \phi = \phi \circ f$.

设 U,V 是 Y 中的任意非空开集,所以 $\phi^{-1}(U),\phi^{-1}(V)$ 是 X 中的非空开集. 因为 (X,f) 族 $\mathscr{F}$ 混合,则对于 $\phi^{-1}(U),\phi^{-1}(V)$,存在 $J \in \mathscr{F}$,使得 $\forall n \in J$,

$$f^{-n}(\phi^{-1}(U)) \cap \phi^{-1}(U) \neq \varnothing, f^n(\phi^{-1}(U)) \cap \phi^{-1}(V) \neq \varnothing$$

$$\varnothing \neq \phi(f^n(\phi^{-1}(U)) \subset \phi^{-1}(U)) \subset \phi(f^n(\phi^{-1}(U))) \cap U = g^{-n}(U) \cap U$$

$$\varnothing \neq \phi(f^n(\phi^{-1}(U)) \cap \phi^{-1}(V)) \subset \phi(f^n(\phi^{-1}(U))) \cap V = g^{-n}(U) \cap V$$

因此 g 是族 $\mathscr{F}$ 混合的.

定理5　族 $\mathscr{F}$ 是平移不变族,设 (X_∞, f_∞) 为由 $\{X_i, g_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 生成的逆极限系统,则每个 f_i 族 $\mathscr{F}$ 混合的充要条件是 f_∞ 族 $\mathscr{F}$ 混合.

证明　"$\Leftarrow$" 若 f_∞ 族 $\mathscr{F}$ 混合,对于每个 $i \in \mathbf{N}, \pi_i: X_\infty \to X_i$, $\pi_i((x_1,x_2,\cdots)) = x_i$,则 π_i 是连续满的开映射,且 $f_i \circ \pi_i = \pi_i \circ f_\infty$,即 (X_i,f_i) 是 (X_∞, f_∞) 的一个因子. 由定理4,得 (X_i,f_i) 也是族 $\mathscr{F}$ 混合的.

"$\Rightarrow$" 因为 $\{\pi_i^{-1}(U_i) \mid U_i$ 是 X_i 的开子集, $i \in \mathbf{N}\}$ 是 X_∞ 的一拓扑基.

欲证 f_∞ 是族 $\mathscr{F}$ 混合的,只需证:对于任意的 $i,j \in \mathbf{N}$, $\{n \in \mathbf{N} \mid f_\infty^n(\pi_i^{-1}(U_i) \cap \pi_j^{-1}(U_j) \neq \varnothing$,其中 U_i, U_j 分别为 X_i,X_j 的非空开集$\} \in \mathscr{F}$

不妨设 $i \leqslant j$,则 $g_{i,j-1}^{-1}(U_i) = g_{j-1}^{-1} \circ g_{j-2}^{-1} \circ \cdots \circ g_i^{-1}(U_i)$ 为 X_j 的开集. 因为 $f_\infty \circ \pi_j^{-1} = \pi_j^{-1} \circ f_j$, $g_{i,j-1} \circ \pi_j = \pi_i$.

所以 $f_\infty^n(\pi_i^{-1}(U_i)) \cap \pi_j^{-1}(U_j) = f_\infty^n(\pi_j^{-1} g_{i,j-1}^{-1}(U_i)) \cap \pi_j^{-1}(U_j) = \pi_j^{-1}[(f_j^n(g_{i,j-1}^{-1}(U_i)) \cap U_j)]$,

$\{n \in \mathbf{N} \mid f_\infty^n(\pi_i^{-1}(U_i)) \cap \pi_j^{-1}(U_j) \neq \varnothing\} = \{n \in \mathbf{N} \mid f_j^n(g_{i,j-1}^{-1}(U_i)) \cap U_j \neq \varnothing\}$.

由于 f_j 是族 $\mathscr{F}$ 混合的,他们属于族 $\mathscr{F}$ 的,从而 f_∞ 是族 $\mathscr{F}$ 混合的.

这是文[3]定理4的推广.

定理6　设 $f:X \to X$ 为紧致的度量空间上的连续映射. 若 f 是族 $\mathscr{F}$ 混合的,则 f 在 X 上的 Borel 概率测度空间 $M(X)$ 上的诱导映射 $\tilde{f}:M(X) \to M(X)$ 是族 $\mathscr{F}$ 混合的.

证明　令 $n \in \mathbf{N}, M_n(X) = \left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i} \mid x_i \in X, i = 1,2,\cdots,n\right\}$,

则 $M_n(X)$ 是 X 上的 Borel 概率测度空间 $M(X)$ 的闭集,且

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} M_n(X)} = M(X).$$

令 U_1,U_2,V_1,V_2 为 $M(X)$ 中的非空开集,则对于某个充分大的 n,存在 $x_j^i, y_j^i \in X, i = 1,2, 1 \leqslant j \leqslant n$,使得

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{x_j^i} \in U_i \cap M_n(X), \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{y_j^i} \in V_i \cap M_n(X), i = 1,2$$

选择 x_j^i 的邻域 U_j^i,使得 $\forall z_j^i \in U_j^i, \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \delta_{z_j^i} \in U_i$

万方数据

同样选择 y_j^i 的邻域 V_j^i,使得 $\forall t_j^i \in V_j^i, \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{t_j^i} \in V_i$.

因为 f 是族 $\mathscr{F}$ 混合的,由定理 2 的证明可见 $S = (\bigcap_{j=1}^{n} N_f(U_j^1, U_j^2)) \cap (\bigcap_{j=1}^{n} N_f(V_j^1, V_j^2)) \in \mathscr{F}$.

对于 $\forall m \in S$,取 $z_j^1 \in U_j^1 \cap f^{-m}(U_j^2)$, $t_j^1 \in V_j^1 \cap f^{-m}(V_j^2)$,

则 $\mu_1 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{z_j^1} \in U_1$, $\nu_1 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{t_j^1} \in V_1$,

$$\tilde{f}^m\mu_1 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{f^m(z_j^1)} \in U_2, \tilde{f}^m\nu_1 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{f^m(t_j^1)} \in V_2,$$

所以 $(\tilde{f} \times \tilde{f})^m(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) \neq \varnothing$,

即得 $\tilde{f}$ 是族 $\mathscr{F}$ 混合的.

这是将文[7]的定理 5 关于拓扑双重遍历的有关结论推广到族 $\mathscr{F}$ 混合上.

定理 7 X 是紧致空间,f 是 $X \to X$ 的连续映射,且 $\mathscr{F}$ 是全族,则 f 族 $\mathscr{F}$ 混合的充要条件是对于任意 $m > 0$,及任何属于 $\mathscr{K}\tau\mathscr{F}$ 的递增序列,有一个 X^m 的 G_δ 子集 $Y, \bar{Y} = X^m$, Y 中的每个点的 m 坐标对于这个序列形成熊意义下的混沌子集.

证明 由引理 7 可见,$C = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ 是相对于序列 $\{l_i\}$ 的熊意义下的混沌集 $\Leftrightarrow$ 对于任意连续映射 $g: C \to X$,存在无限递增子序列 $\{r_i\} \subset \{l_i\}$,使得 $\forall x_i \in C, \lim_{i\to\infty} f^{r_i}(x_i) = g(x)$,而后者又等价于对于 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$, $\{(f^{(m)})^{l_i}(x); i \geqslant 1\}$ 在 $X^m = X \times X \times \cdots X$ 中稠密. 所以

"$\Rightarrow$" 由引理 1,引理 2 可得.

"$\Rightarrow$" 由引理 2 和定理 2 可得.

定理 8 设 X 为至少两点的可分局部紧致度量空间,若 f 是族 $\mathscr{F}$ 混合的,则存在一个相对于 S 的熊意义下的混沌的 X 的 C 稠密 F_δ 子集是 f 按 S 的某子序列的分布混沌集.

证明 由引理 3 和引理 8 可得.

注 定理 8 是文[4]中定理 1 的一个推广.

定理 9 f 是紧致度量空间 X 上的连续自映射. 对于 f 不变的,在 X 的 Borel 子集上正定的概率测度 μ, f 族 $\mathscr{F}$ 强混合,则对于 $\forall m > 0$,任何属于 $\mathscr{F}$ 的递增序列,X^m 中的几乎每一个点的 m 个坐标对于这个序列形成熊意义下的 X 的混沌子集.

证明 因为 $f^{(m)}$ 是紧致度量空间 X^m 上的连续自映射,如果 $\forall \{n_i\} \in \mathscr{F}$,及 $\{U_n\}_1^\infty$ 是 X^m 的拓扑基,则

$$\{x \mid \{(f^{(m)})^{n_i}(x)\}_{i=1}^\infty \text{ 稠密}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty}(f^{(m)})^{-n_i}(U_n).$$

所以若 $f^{(m)}$ 族 $\mathscr{F}$ 遍历,则由引理 5,$\mu\{x \mid \{(f^{(m)})^{n_i}(x)\}_{i=1}^\infty \text{ 稠密}\} = 1$,于是由引理 4,引理 6 可得定理证明.

定理 7 将廖公夫在文[4]中关于拓扑混合、拓扑弱混合的讨论推广到一般的族 $\mathscr{F}$ 混合. 定理 9 则将文[4]中关于弱混合和混合的结论推广到一般的遍历意义下的族 $\mathscr{F}$ 强混合.

[参考文献]

[1] Furstenberg H. Recurrence in Ergodic Theory and Combinational Number Theory[M]. Princeton: Princeton University Press, 1981.

[2] Akin E. Recurrence in Topological Dynamics: Furstenberg Families and Ellis Actions[M]. New York: Plenum Press, 1997.

[3] Yang R S. Topological ergodicity and topological double ergodicity[J]. Acta Math Sinica, 2003, 46(3): 555—560.

[4] Liao Gongfu. Chaos for mixing transformations[J]. Chin Ann of Math, 1994, 15B(4): 501—506.

[5] Xiong J C, Yang Z G. Chaos caused by a topologically mixing maps[A]. In Dynamical Systems and Related Topics[C]. Singapore: World Scientific, 1992. 550—572.

[6] Walter P. An Introduction to Ergodic Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1982.

[7] Yang R S. Topological ergodic maps[J]. Acta Math Sinica, 2001, 44(6): 1063—1068.

[责任编辑:陆炳新]

万方数据