关于临界的圆色数的一个注记

杨海燕,许宝刚

(南京师范大学数学与计算机科学学院,210097,江苏,南京)

[摘要] 圆色数是正常着色的一个推广,由 Vince 在 1988 年首次提出. 现我们考虑这样一个问题:对于 $\forall \varepsilon > 0$,是否存在一个具有高连通性的临界图 G 使得 $\chi_c(G) \leqslant \chi(G) - 1 + \varepsilon$?对此,Steffen 和 Zhu 已证明对 $\forall m \geqslant 4$ 存在满足要求的 m-连通(m+1)-临界图,只留下一种情形未解决,即 G 的连通度为 3 时的情形. 在这篇文章中我们就此情形进行讨论,并给出肯定结论.

[关键词] 圆色数,临界图,连通度

[中图分类号]O157.5, [文献标识码]A, [文章编号]1001-4616(2005)04-0038-03

A Note on the Circular Chromatic Number of Chromatic Critical Graphs

Yang Haiyan, Xu Baogang

(School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, 210097, Nanjing, China)

Abstract: Circular coloring, first introduced by Vince, is a natural generalization of classical coloring. We consider the question: Let $\varepsilon > 0$ be a positive number, do there exist a critical graphs G of high connectivity such that $\chi_c(G) \leqslant \chi(G) - 1 + \varepsilon$? Steffen and Zhu proved that for any integer $m \geqslant 4$, there is a m-connected $(m+1)$-critical graph satisfying the reqest, where some marginal situations are left. In this paper, we give a positive answer to the situation.

Key words: circular-coloring, critical graphs, connectivity

0 引言

Vince 1988 年在[1]中首次引入了图 G 的圆染色与圆色数 $\chi_c(G)$ 的概念(当时 Vince 定义其为星染色与星色数 $\chi^*(G)$,圆染色与圆色数 $\chi_c(G)$ 是由 zhu 在[6]中提出同时证明了此两种定义具有等价性),并证明了 $\chi(G) - 1 < \chi_c(G) \leqslant \chi(G)$. Abbott 和 Zhou 在[4]中具体研究了圆色数接近色数的一类特殊图,同时提出了问题:对于 $\forall \varepsilon > 0$,是否存在一个具有高连通性的临界图 G 使得 $\chi_c(G) \leqslant \chi(G) - 1 + \varepsilon$?

显然,奇圈 C_{2k+1} 是 2-连通 3-临界图,且 $\chi_c(C_{2k+1}) = 2 + 1/k$. Steffen 和 Zhu 在[2]中证明了对任意整数 $k \geqslant 2$ 和整数 $m \geqslant 4$,存在 m-连通 $(m+1)$-临界图 $H(m,k)$ 使 $\chi_c(H(m,k)) \leqslant m + 1/k$. 最后,他们认为:对于整数 $k \geqslant 3$,图 $H(3,k) - e^*(e^* = (k,3k))$ 是 3-连通 4-临界图,且 $\chi_c(H(3,k) - e^*) \leqslant 3 + 1/k$. 但是,我们发现图 $H(3,4) - (4,12)$ 不是 4-临界图. 为此,我们在这一篇文章中证明图 $H(3,k)$ 是满足要求的图.

1 基本定义的知识准备

图 G 的一个 (k,d)-着色是指 k 种颜色 $1,2,\cdots,k$ 对于 G 的各顶点的一个分配 C,使得任意相邻的两个顶点 u 和 v 的颜色 $C(u)$ 和 $C(v)$ 满足 $|C(u) - C(v)|_k \geqslant d$,其中 $|x|_k = \min\{|x|, k - |x|\}$. 显然图

收稿日期:2005-03-21.

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10371055).

作者简介:杨海燕,女,1980—,硕士研究生,主要从事图论与组合优化的学习与研究. E-mail:yanghaiyan210@sohu.com

通讯联系人:许宝刚,1965—,教授,博士生导师,主要从事图论和组合优化的教学与研究. E-mail:baogxu@njnu.edu.cn

G 的 $(k,1)$-着色就是 G 的一个正常着色. 若 G 有 (k,d)-着色,则称 G 是 (k,d)-可着色的. 图 G 的星色数 $\chi^*(G) = \inf\{k/d : G$ 是 (k,d)-可着色的$\}$. [1] 中证明此处下确界可取为最小值.

图 G 的一个 r-圆着色是指长为 r 的圈上的单位开弧对 G 的各顶点的分配,使得任意相邻的两顶点对应的单位开弧不交. 若 G 有 r-圆着色,则称 G 是 r-圆可着色的. 图 G 的圆色数 $\chi_c(G) = \inf\{r : G$ 是 r-圆可着色的$\}$.

从[5,6] 可知,上述两定义是等价的.

根据[3] 中结论,我们知道图 G 的一个 (k,d)-着色对应于 G 的顶点集的一个 (k,d)-划分 $(V_0, V_1, \cdots, V_{k-1})$,使得对 $j(0 \leqslant j \leqslant k-1)$ 有 $V_j \cup V_{j+1} \cup \cdots \cup V_{j+d-1}$ (这里的加法运算取 k 模) 是独立集. 同时,[3] 中给出下面的定理:

定理[3] 设 $(V_0, V_1, \cdots, V_{k-1})$ 是 G 的顶点集的一个 (k,d)-划分,其中 k 和 d 互素. 如果存在 $i \in \{0,1,2,\cdots,k-1\}$ 使 $V_i = \varnothing$,则 $\chi_c(G) < k/d$.

2 具有高连通度的临界图

一个图 G 称为临界的,如果对 G 的每个真子图 H 有 $\chi(H) < \chi(G)$. 在这一部分,我们继续[2] 中定理 4 的证明给出圆色数接近色数的一类 3-连通 4-临界图.

定理 1 对于整数 $k \geqslant 3$,存在 3-连通 4-临界图 $H(3,k)$ 使得 $\chi_c(H(3,k)) \leqslant 3 + 1/k$.

证明 我们构造图 $H(3,k)$,它的顶点集为 Z_{3k+1},令

$$V^* = \{k, 2k, 3k\};$$
$$V^1 = \{0, 1, \cdots, k-1\};$$
$$V^2 = \{k+1, \cdots, 2k-1\};$$
$$V^3 = \{2k+1, \cdots, 3k-1\}.$$

(i,j) 为 $H(3,k)$ 的边当且仅当 $|i-j|_{3k+1} = k$ 或者 $i \in V^*$,且 $|i-j|_{3k+1} > k$.

对 $H(3,k)$ 的顶点 i 着颜色 i,显然此着色为 $H(3,k)$ 的一个 $(3k+1,k)$-着色. 所以,$\chi_c(H(3,k)) \leqslant 3 + 1/k$. 下面我们只需要证明 $H(3,k)$ 为 3-连通 4-临界图.

首先我们用反证法证明 $H(3,k)$ 不是 3-可着色的. 假设 $H(3,k)$ 可用颜色 1,2,3 着色. 由于 V^* 导出完全子图,所以不妨让顶点 $k, 2k, 3k$ 分别着颜色 1,2,3. 因为顶点 $k-1$ 与顶点 $2k$ 和顶点 $3k$ 相邻,所以顶点 $k-1$ 只能着颜色 1. 因为顶点 $2k-1$ 与顶点 $k-1$ 和顶点 $3k$ 相邻,所以只能着颜色 2. 依此类推,顶点序列 $(k-1, 2k-1, \cdots, 1, k+1, 2k+1, 0)$ 的颜色除顶点 0 外均被其前边邻点的颜色唯一确定. 因此,顶点 k 着颜色 1,顶点 $k+1$ 着颜色 2,顶点 $2k+1$ 着颜色 3. 但顶点 0 与顶点 $k, k+1, 2k+1$ 都相邻,所以没有适合的颜色可以着,矛盾. 所以,$H(3,k)$ 不是 3-可着色的.

接着我们证明图 $H(3,k) - e$ (其中 $e = (i,j)$ 是 $H(3,k)$ 的任意一条边) 是 3-可着色的. 在以下的论证中我们频繁地运用这样一个事实:连续 k 个顶点 $\{i, i+1, \cdots, i+k-1\}$ (加法取模 $3k+1$) 构成 $H(3,k)$ 的一个独立集.

若 i 和 j 中至少有一个不属于 V^*,不妨设 i 不属于 V^*,则 i 在 $H(3,k) - e$ 中度为 2. 显然顶点集 $V - i$ 可被分成 3 个连续的阶为 k 的独立子集. 因为 i 在 $H(3,k) - e$ 中度为 2,所以 $H(3,k) - i$ 的 3-着色可扩充为 $H(3,k) - e$ 的 3-着色.

若 $i = nk$, $j = (n+1)k$ $(n = 1,2)$. 设 $W = \{i, nk+1, \cdots, (n+1)k-1, j\}$ 将顶点集 $V - W$ 划分成 2 个连续的阶为 k 的独立子集. 从而给出了一个 $H(3,k) - e$ 的 3-着色.

若 $i = k$, $j = 3k$. 我们将顶点集划分成 3 部分:$A_1 = \{1, 2, \cdots, k-2, k, 3k\}$, $A_2 = \{0, k-1, k+1, \cdots, 2k-2, 3k-1\}$, $A_3 = \{2k-1, 2k, \cdots, 3k-2\}$. 显然,$A_1$, A_2 和 A_3 是 $H(3,k) - e$ 的独立集. 所以 $H(3,k) - e$ 是 3-可着色的.

所以,$H(3,k)$ 是 4-临界图.

最后我们证明图 $H(3,k)$ 是 3-连通的. 根据 Menger 定理,我们只要证明对于 $H(3,k)$ 的任意两个不同的顶点 i 和 j (不妨设 $i < j$) 之间存在 3 条内不交的路即可. 为此我们进行分类讨论.

1. $i, j \in V^*$

因为 $G[V^*]$ 是阶为 3 的完全图,所以 $G[V^*]$ 中包含连接 i 和 j 的 2 条内不交的路.

下面给出满足要求的第三条路:

$i = k$ 和 $j = 2k$ 时,$P_3 = \{i, 0, j\}$;

$i = 2k$ 和 $j = 3k$ 时,$P_3 = \{j, k-1, i\}$;

$i = k$ 和 $j = 3k$ 时,$P_3 = \{i, 3k-1, 2k-1, k-1, j\}$.

2. $i, j \in V^1$

$P_1 = \{i, 2k, j\}$; $P_2 = \{i, i+k, 3k, j+k, j\}$; $P_3 = \{j, j+2k+1, k, i+2k+1, i\}$.

3. $i, j \in V^2$

$P_1 = \{i, 3k, j\}$; $P_2 = \{i, i+k, k, k+j, j\}$; $P_3 = \{j, j-k, 2k, i-k, i\}$.

4. $i, j \in V^3$

$P_1 = \{i, k, j\}$; $P_2 = \{i, i-k, 3k, j-k, j\}$; $P_3 = \{j, j+k, 2k, i+k, i\}$.

5. $i \in V^*, j \in V^s (s = 1, 2, 3)$

$P_1 = \{i, (s+1)k \pmod{3k}, j\}$; $P_2 = \{i, (s+2)k \pmod{3k}, (j+k) \pmod{3k+1}, j\}$;
如果 $i = sk$, $P_3 = \{i, (j-k) \pmod{3k+1}, j\}$;否则,$P_3 = \{i, sk, (j-k) \pmod{3k+1}, j\}$;

6. $i \in V^2, j \in V^3$

$P_1 = \{i, i-k, 2k, j-2k-1, j\}$; $P_2 = \{i, 3k, j-k, j\}$; $P_3 = \{i, i+k, k, j\}$.

7. $i \in V^1, j \in V^2$

若 $j = i+k$, $P_1 = \{i, j\}$; $P_2 = \{i, i+2k+1, k, j+k, j\}$; $P_3 = \{i, 2k, 3k, j\}$.

否则 $P_1 = \{i, i+k, 3k, j\}$; $P_2 = \{i, i+2k+1, k, j+k, j\}$; $P_3 = \{i, 2k, j-k, j\}$.

8. $i \in V^1, j \in V^3$

若 $j = i+2k+1$, $P_1 = \{i, j\}$; $P_2 = \{i, 2k, k, j\}$; $P_3 = \{i, i+k, 3k, j-k, j\}$.

否则 $P_1 = \{i, 2k, j-2k-1, j\}$; $P_2 = \{i, i+k, 3k, j-k, j\}$; $P_3 = \{i, i+2k+1, k, j\}$.

至此,结合[2]中定理 4,我们完整地回答了 Abbott 和 Zhou 在[4]中提出的问题,即对于 $\forall \varepsilon > 0$,存在一个具有高连通性的临界图 G 使得 $\chi(G) \leqslant \chi(G) - 1 + \varepsilon$.

[参考文献]

[1] Vince A. Star chromatic number [J]. J Graph Theory, 1988, 12(4):551—559.

[2] Steffen E, Zhu X. On the star chromatic numbers of graphs [J]. Combinatorica, 1996, 16(3):439—448.

[3] Fan G. Circular chromatic number and Mycielski graphs [J]. Combinatorica, 2004, 24(1):127—155.

[4] Abbott H L, Zhou B. The star chromatic number of a graph [J]. J Graph Theory, 1993, 17(3):349—360.

[5] Zhu X. Circular chromatic number: a survey [J]. Discrete Mathematics, 2001, 229(3):371—410.

[6] Zhu X. Star chromatic numbers and products of graphs [J]. J Graph Theory, 1992, 16(4):557—569.

[责任编辑:陆炳新]

