一类拟线性椭圆型方程正奇异解的能量估计

周 杰,杨作东

(南京师范大学数学与计算机科学学院,江苏 南京 210097)

[摘要] 本文给出了如下问题

$$\begin{cases}\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+\lambda f(u)=0, x\in\Omega\\ u|_{\partial\Omega}=0,\end{cases}$$

奇异解的能量估计,其中 $p\geq 2$,$\Omega=B_1$ 是单位球,$\lambda>0$ 是一个参数. 进一步得到了 u_λ 是上述问题的正则正解序列且当 $\lambda\to\lambda_0\in(0,\infty)$ 时逐点收敛于奇异解 U,则在 $L^{q+1}(B_1)$ 和 $H_0^1(B_1)$ 中,当 $\lambda\to\lambda_0$ 时 u_λ 收敛于 U.

[关键词] 存在性,正奇异解,拟线性椭圆型方程,能量估计

[中图分类号] O175.2 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2006)01-0021-04

Energy Estimate of Positive Singular Solutions for a Class Quasilinear Elliptic Equations

Zhou Jie, Yang Zuodong

(School of Mathematics and Computer Sciences, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

Abstract: The authors give energy estimate of singular positive solution for the problem

$$\begin{cases}\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+\lambda f(u)=0, x\in\Omega\\ u|_{\partial\Omega}=0,\end{cases}$$

where $p\geq 2$, $\Omega=B_1$ is the unit ball and $\lambda>0$ is a parameter. We also prove that if positive regular solutions convergences to a singular solution pointwise in $(0,1)$, then the convergences obtain in L^{q+1} and H^1 as well.

Key words: existence, positive singular solution, quasilinear elliptic equation, energy estimate

0 引言

本文研究了方程

$$\begin{cases}\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+\lambda f(u)=0, x\in\Omega\\ u|_{\partial\Omega}=0,\end{cases}\tag{1}$$

正奇异解的能量估计. 这里 $p\geq 2$,$\Omega=B_1$ 是单位球,$\lambda>0$ 是一个参数. 非线性函数 $f\in C^1(\mathbf{R})$ (或 f 是一般的 Lipschitz 连续)满足下面超临界增长性条件:

(H) 当 $p\geq 2$ 时, 存在常数 $q>(N(p-1)+p)/(N-p)$ 和 $A>0$ 使得对 $u\geq A$ 有 $(q+1)F(u)\leq uf(u)$,这里 $F(u)=\int_0^u f(v)\mathrm{d}v$ 和 $F(A)>0$.

近 20 余年, 问题

$$\begin{cases}\Delta u+\lambda f(u)=0, x\in\Omega\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}\tag{2}$$

收稿日期: 2005-09-28.

基金项目: 国家自然科学基金(10571022)和江苏省教育厅自然科学基金资助项目(04KJB110062).

作者简介: 周杰,1981—,硕士研究生,主要从事微分方程方向的学习与研究.

通讯联系人:杨作东,1961—,教授,博士生导师,主要从事微分方程方向的教学与研究. E-mail:yangzuodong@njnu.edu.cn

非奇异正解和正奇异解的存在性、非存在性和能量估计已经有许多结果,例如文[1 - 5]. 对于问题(1) 奇异解和非奇异解的存在性及多解性已有了一些结果,参见文[6 - 11]. 而我们注意到,对于问题(1) 正奇异解的能量估计结果很少. 由文[1,5] 的启示, 本文研究了问题(1) 正奇异解的能量估计,进一步得到了如果问题(1) 正则正解序列且当 $\lambda \to \lambda_0 \in (0,\infty)$ 时逐点收敛于奇异解 U,则在 $L^{q+1}(B_1)$ 和 $H_0^1(B_1)$ 中,当 $\lambda \to \lambda_0$ 时 u 收敛于 U,推广和补充了文[1,5,6] 的主要结果.

从文献[6], 我们给出下面定义和引理.

定义 1　对任意 $\alpha \in (0,\infty)$ 和 $B \geqslant 0$, 令 $R(\alpha,B)$ 是使 $u(r,\alpha) = B$ 成立的第一个 r. 如果不存在这样的 r, 将记 $R(\alpha,B) = \infty$. 我们也记 $R(\alpha) = R(\alpha,0)$ 和 $R_1(\alpha) = R(\alpha,A)$.

定义 2　对 $p \geqslant 2$, 令 $\gamma = (1/(q+1)(N-p))((N-p)(q+1) - Np) > 0$. 在$[A,\infty]$ 上定义两个正函数 $R_*(B)$ 和 $R^*(B)$, 即

$$R_*(B)^{p/(p-1)} = M(\bar{B})^{-1/(p-1)}B,\quad R^*(B)^p = (p/(p-1))^{p-1}(NB/(q+1))^p(F(B))^{-1},$$

这里 $\bar{B} = [(1/N)^{1/(p-1)}(p-1)/p+1]\gamma^{-1}B$ 和 $M(\bar{B}) = \max\{f(u):u \in [0,\bar{B}]\}$.

引理 1　令 f 满足(H). 则对任何 $B \geqslant A$ 和 $\alpha \in (\bar{B},\infty)$ 有

$$R_*(B) \leqslant R(\alpha,B) \leqslant R^*(B), \tag{3}$$

和

$$\left[\frac{(q+1)}{N}\frac{F(B)}{B}\right]^{1/p-1}R_*(B)^{1/(p-1)} \leqslant -u'(R(\alpha,B),\alpha) \leqslant \frac{pN}{(p-1)(q+1)}BR_*(B)^{-1}. \tag{4}$$

引理 2　假设 f 满足(H). 则存在正常数 C 使得对(1) 的任意满足 $\|u_\lambda\|_\infty > A$ 的正对称解,我们有

$$u_\lambda(r) \leqslant C\lambda^{-1/(q-p+1)}r^{-p/(q-p+1)} \text{对 } r \in (0,r_0), \tag{5}$$

这里 $u_\lambda(r_0) = A$.

证明　因为 f 满足(H), 容易推出存在常数 η 使得对任意 $u \geqslant A$ 有

$$f(u) \geqslant \eta u^q. \tag{6}$$

因为 u 为对称解,则(1) 可写为

$$(r^{N-1}\Phi_p(u'))' = -\lambda\, r^{N-1}f(u(r)), \tag{7}$$

则对 $r \in (0,r_0)$ 有

$$u'_\lambda(r) < 0. \tag{8}$$

对任意 $r \in (0,r_0)$ 和 $\bar{r} \in (0,r)$, 对(7) 从 $\bar{r}$ 到 r 积分, 我们得到

$$r^{N-1}\Phi_p(u'_\lambda(r)) < \bar{r}^{N-1}\Phi_p(u'_\lambda(\bar{r})) - \lambda\int_{\bar{r}}^r s^{N-1}f(u_\lambda(s))\mathrm{d}s.$$

于是由(8) 对任意 $\bar{r} \in (0,r)$ 可得

$$r^{N-1}\Phi(u'_\lambda(r)) < -\lambda\int_{\bar{r}}^r s^{N-1}f(u_\lambda(s))\mathrm{d}s.$$

令 $\bar{r} \to 0$,且利用(6) 和(8) 可得

$$r^{(N-1)/(p-1)}u'_\lambda(r) < -\lambda^{1/(p-1)}(\int_0^r s^{N-1}f(u_\lambda(s))\mathrm{d}s)^{1/(p-1)}$$

$$< -\lambda^{1/(p-1)}(\int_0^r s^{N-1}\eta u_\lambda^q(s)\mathrm{d}s)^{1/(p-1)} < -\lambda^{1/(p-1)}C_1u_\lambda^{q/(p-1)}(r)r^{N/(p-1)},$$

这里 $C_1 = (\eta/N)^{1/(p-1)}$. 用 $u_\lambda^{1/(p-1)}(r)r^{(N-1)/(p-1)}$ 两边同除上述不等式,则对 $r \in (0,r_0)$ 有

$$u_\lambda^{-q/(p-1)}(r)u'_\lambda(r) \leqslant -\lambda^{1/(p-1)}C_1r^{1/(p-1)}.$$

从 0 到 r 积分,对 $r \in (0,r_0)$ 可得

$$u_\lambda^{(p-1-q)/(p-1)}(r) \geqslant C_2\lambda^{1/(p-1)}r^{p/(p-1)},$$

这里 $C_2 = C_1(q-p+1)/p$. 显然取 $C = C_2^{(p-1)/(q-p+1)}$,可得(5).

从文献[4] 给出 Pohozaev 等式

引理 3　令 $u(r)$ 是(1) 在 $(r_1,r_2) \subset (0,\infty)$ 中的对称解且令 a 是一个任意常数. 则对任意 $r \in (r_1,r_2)$ 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^N\left\{(1-1/p)|u'|^p+F(u)+\frac{a}{r}uu'|u'|^{p-2}\right\}\right]$$
$$=r^{N-1}\left[NF(u)-auf(u)+(a+1-N/p)|u'|^p\right]. \tag{9}$$

引理 4 假设f满足(H). 如果U是(1)的一个正奇异对称解, 则对$U(s)>A$有

$$\frac{p-1}{p}|U'(r)|^p+\lambda F(U(r))+\frac{N}{q+1}\frac{U(r)U'(r)|U'(r)|^{p-2}}{r}<0. \tag{10}$$

证明 在(9)中令$u(r)=U(r)$和$a=N/(q+1)$且从0到r积分, 再由(H)可得

$$\frac{(p-1)}{p}|U'|^p+F(U(r,\alpha))+\frac{N}{(q+1)}\frac{U(r)U'(r)|U'(r)|^{p-2}}{r}<0.$$

定理 1 假设f满足(H). 如果U是(1)的一个正奇异解, 则有

$$\int_{B_1}|\nabla U|^p=\lambda\int_{B_1}Uf(U)<\infty. \tag{11}$$

证明 令$R_1\in(0,1)$使得$U(R_1)=A$. 由(10), 对$r\in(0,R_1)$有

$$-U'(r)<\frac{pN}{(p-1)(q+1)}\frac{U(r)}{r}. \tag{12}$$

把(5)代入(12),对$r\in(0,R_1)$可得

$$-U'(r)<C_1\lambda^{-1/(p-1)(q-p+1)}r^{-(q+1)/(p-1)(q-p+1)}, \tag{13}$$

这里$C_1=(pN/(p-1)(q+1)C)^{1/(p-1)}$.

对任意$\varepsilon\in(0,1)$, 令$\Omega_\varepsilon=\{x\in\mathbf{R}^N:\varepsilon<|x|<1\}$和$B_\varepsilon=\{x\in\mathbf{R}^N:|x|<\varepsilon\}$. 则有

$$\int_{\Omega_\varepsilon}U\,\mathrm{div}(|\nabla U|^{p-2}\nabla U)+\lambda\int_{\Omega_\varepsilon}Uf(U)=0$$

从而推出

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon}U\frac{\partial U}{\partial v}-\int_{\Omega_\varepsilon}|\nabla U|^p+\lambda\int_{\Omega_\varepsilon}Uf(U)=0. \tag{14}$$

显然, 由(5),(13), 我们有

$$0\leqslant\int_{\partial\Omega_\varepsilon}U\frac{\partial U}{\partial v}=-\int_{\partial B_\varepsilon}UU'\leqslant\int_{\partial B_\varepsilon}C\lambda^{-2/(q-p+1)}\varepsilon^{-(p+q+1)/(q-p+1)}=$$
$$C_2\omega_n\lambda^{-2/(q-p+1)}\varepsilon^{N-1-(p+q+1)/(q-p+1)}=C_3\varepsilon^{N-1-(p+q+1)/(q-p+1)},$$

这里$C_3=C_2\omega_n\lambda^{-2/(q-p+1)}$. 因为$N-1-\frac{p+q+1}{q-p+1}=\frac{1}{q-p+1}((N-2)q-N(p-1)-2)>0$, 从而有

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon}U\frac{\partial U}{\partial v}\to 0\quad 当\quad \varepsilon\to 0^+.$$

类似, 从(13)对任意$\varepsilon\in(0,R_1)$推出

$$\int_{\Omega_\varepsilon}|\nabla U|^p\leqslant C_4\ 对某\ C_4>0.$$

显然, (11)成立.

定理 2 假设f满足(H). 若u_λ是(1)的正则正解序列且当$\lambda\to\lambda_0\in(0,\infty)$时逐点收敛于奇异解$U$,则在$L^{q+1}(B_1)$和$H_0^1(B_1)$中, 当$\lambda\to\lambda_0$时$u_\lambda$收敛于$U$.

证明 由(3),可选择$\varepsilon>0$使得$u_\lambda(\varepsilon)\geqslant A$, 则

$$\int_{B_1}|u_\lambda-U|^{q+1}=\int_{B_\varepsilon}|u_\lambda-U|^{q+1}+\int_{\Omega_\varepsilon}|u_\lambda-U|^{q+1}=I_1+I_2.$$

由文献[1]中引理3完全类似方法可得, 当$\lambda\to\lambda_0$时在$[\varepsilon,1]$中u_λ一致收敛于U,和当$\lambda\to\lambda_0$时$I_2\to 0$. 另一方面, 由(5)

$$I_1\leqslant C_1\int_0^\varepsilon r^{v-1}\mathrm{d}r\leqslant C_2\varepsilon^v,$$

这里

$$v=N-p(q+1)/(q-p+1)=\frac{1}{q-p+1}[q(N-p)-(N(p-1)+p)]>0$$

C_1, C_2 是与 C, N, q, λ_0 有关而与 λ 无关的正常数. 因此

$$\limsup_{\lambda \to \lambda_0} \int_{B_1} | u_\lambda - U |^{q+1} \leq C_3 \varepsilon^{\nu}.$$

由于 ε 可以选任意小, 从而可得当 $\lambda \to \lambda_0$ 时在 $L^{q+1}(B_1)$ 中 $u_\lambda \to U$. 类似可得当 $\lambda \to \lambda_0$ 时在 $H^1(B)$ 中 $u_\lambda \to U$.

[参考文献]

[1] Lin S S. Positive singular solution for semilinear elliptic equations with supercritical growth[J]. J Diff Eqns, 1994, 114(1): 57—76.

[2] Guedda M, Veron L. Local and global properties of solutions of quasilinear elliptic equations[J]. J Diff Eqns, 1988, 76(1): 159—189.

[3] Qi Jiangang, Zhuang Wan. Existence of singular positive solutions of semilinear elliptic equations[J]. Acta Math Applicate Sinica, 1998, 14(1):109—112.

[4] Ni W M, Serrin J. Nonexistence theorems for singular solutions of quasilinear partial differential equations[J]. Comm Pure Appl Math, 1986, 39: 379—399.

[5] Gallouet T, Mignot F, Puel J P. Quelques resultas sur le probleme $\triangle u = \lambda e^u$[J]. C R Acad Sci Paris Ser I Math, 1988, 307:282—292.

[6] 杨作东. 一类拟线性椭圆型方程正奇异解的存在性[J]. 数学物理学报, 2005, 25A(4):445—450.

[7] Yang Zuodong. Existence of positive bounded entire solutions of quasilinear elliptic equations[J]. Applied Math and Computation, 2004, 156(3):743—754.

[8] Yang Zuodong, Guo Zongming. Existence of positive radial solutions and entire solutions for quasilinear singular boundary value problems[J]. Ann of Diff Eqns, 1996, 12(2): 243—251.

[9] Guo Zongming. Some existence and multiplicity results for a class of quasilinear elliptic equations[J]. Nonlinear Anal, 1992, 18(10): 957—971.

[10] Guo Zongming, Webb J R L. Uniqueness of positive solutions for quasilinear elliptic equations when a parameter is large[J]. Proc Roy Soc Edinburgh, 1994, 124A(1): 189—198.

[11] Garcia-Huidobro M, Manasevich, Yarur C S. On positive singular solutions for a class of nonhomogeneous p-Lalacian-Like equations[J]. J Diff Eqns, 1998, 145(1):23—51.

[责任编辑:陆炳新]