# 用基于矩阵正常分裂的迭代法求解长方或奇异线性方程组

陈新, 陈永林

(南京师范大学数学与计算机科学学院, 江苏 南京 210097)

[摘要] 本文证明了对于长方或奇异的线性方程组 $Ax=b$可以基于系数阵 $A$的适当的正常分裂 $A=M-N$构造收敛的迭代矩阵 $M_{T,S}^{(1,2)}N$,使得迭代 $x_{j+1}=M_{T,S}^{(1,2)}Nx_j+M_{T,S}^{(1,2)}b$对任何 $x_0$均收敛到 $Ax=b$的一个解

$$x_\infty\equiv\lim_{j\to\infty}x_j=(I-M_{T,S}^{(1,2)}N)^{-1}M_{T,S}^{(1,2)}b=A_{T,S}^{(1,2)}b.$$

[关键词] 收敛阵, 半收敛阵, 正常分裂, 亚正常分裂, 迭代阵

[中图分类号] O241.6 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2006)02-0001-05

## Solving Rectangular or Singular Linear Systems by Iterative Methods based on Proper Splittings of Matrices

Chen Xin, Chen Yonglin

(School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

Abstract: This paper proved the following result: for the rectangular or singular linear systems $Ax=b$, we constructed a convergent iteration matrix $M_{T,S}^{(1,2)}N$ based on an appropriate proper splitting $A=M-N$, and for any $x_0$ the iteration

$$x_{j+1}=M_{T,S}^{(1,2)}Nx_j+M_{T,S}^{(1,2)}b$$

converges to

$$x_\infty\equiv\lim_{j\to\infty}x_j=(I-M_{T,S}^{(1,2)}N)^{-1}M_{T,S}^{(1,2)}b=A_{T,S}^{(1,2)}b,$$

which is a solution of the linear systems $Ax=b$.

Key words: convergent matrix, semiconvergent matrix, proper splitting, subproper splitting, iteration matrix

## 0 引言

本文使用数值代数通用记号, 并使用文[1-3]中关于广义逆矩阵的记号.

我们考虑用迭代法求解线性方程组

$$Ax=b \tag{1}$$

的问题, 其中 $A$是 $m\times n$阶长方阵或 $n$阶奇异方阵, $b\in R(A)$.

设 $G\in C^{n\times n}$. 若 $\lim_{j\to\infty}G^j=0$, 则称 $G$为收敛阵. 熟知, $G$为收敛阵当且仅当 $\rho(G)<1$. 若 $\lim_{j\to\infty}G^j$存在, 则称 $G$为半收敛阵. 下文中提到的半收敛阵专指 $\rho(G)=1$的半收敛阵.

设 $A\in C^{m\times n}$, $A$有分裂 $A=M-N$. 若 $M$满足条件

$$R(M)=R(A),\ 与\ N(M)=N(A), \tag{2}$$

则称该分裂为 $A$的正常分裂 (proper splitting)[4]; 若 $M$满足条件

$$R(M)\supset R(A),\ 与\ N(M)\subset N(A), \tag{3}$$

收稿日期: 2005-11-24

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10371056).

作者简介: 陈新, 1962—, 副教授, 主要从事计算数学与数学建模的教学与研究. E-mail: xchen@njnu.edu.cn

则称该分裂为 $A$的亚正常分裂(subproper splitting)[5].下文提到的亚正常分裂专指满足条件

$$R(M)\supsetneqq R(A),\ 与\ N(M)\subsetneqq N(A) \tag{4}$$

的分裂.

引理 0.1　设 $A\in C^{m\times n}$,有分裂 $A=M-N$是给定的,并设子空间 $T\subset C^n$与 $S\subset C^m$满足条件

$$T\oplus N(M)=C^n 与 R(M)\oplus S=C^m, \tag{5}$$

即 $M_{T,S}^{(1,2)}$存在.

(1)若分裂 $A=M-N$是正常分裂,则 $M_{T,S}^{(1,2)}N$决不是半收敛阵;

(2)若分裂 $A=M-N$是亚正常分裂,则 $M_{T,S}^{(1,2)}N$决不是收敛阵.

证明　(1)若分裂 $A=M-N$是正常分裂,则条件(5)等价于

$$T\oplus N(A)=C^n 与 R(A)\oplus S=C^m, \tag{6}$$

这又等价于 $A_{T,S}^{(1,2)}$存在.

今设列满秩阵 $U$, $V^*$适合条件

$$T=R(U) 与 S=N(V). \tag{7}$$

从 $A_{T,S}^{(1,2)}$与 $M_{T,S}^{(1,2)}$均存在可知, $VAU$与 $VMU$均可逆.而

$$VAU=V(M-N)U=VMU[I-(VMU)^{-1}VNU],$$

故 $I-(VMU)^{-1}VNU$可逆,从而 $I-M_{T,S}^{(1,2)}N=I-U(VMU)^{-1}VN$是可逆阵.若 $M_{T,S}^{(1,2)}N$是谱半径为 1的半收敛阵,则它有特征值 1,因而 $I-M_{T,S}^{(1,2)}N$是奇异阵,得一矛盾.

(2)若分裂 $A=M-N$是亚正常分裂,则有 $\operatorname{rank}A<\operatorname{rank}M$.若 $M_{T,S}^{(1,2)}N$为收敛阵,则 $I-M_{T,S}^{(1,2)}N$可逆.另从亚正常分裂的定义可知 $R(N)\subset R(M)$,从而有

$$A=M-N=M(I-M_{T,S}^{(1,2)}N).$$

但这一等式表明 $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}M$,矛盾.

这一引理所述的否定性判定表明:要想构造半收敛的迭代阵或收敛的迭代阵,只有当相应的分裂是亚正常分裂或正常分裂时才是可能的.

文[5-8]中所用的半收敛迭代均是基于亚正常分裂的.文[2,9]中对长方或奇异方阵,给出了基于亚正常分裂而构造半收敛迭代阵的一般方法,任何半收敛迭代均可用此法获得.

那么,是否确实可以基于矩阵的正常分裂来构造收敛的迭代阵呢?

本文的目标就是给出这一问题的肯定回答.

## 1　基于矩阵正常分裂的迭代法

定理 1.1　设 $A\in C^{m\times n}$,则存在 $A$的正常分裂

$$A=M-N, \tag{8}$$

使得对满足条件(5)的子空间 $T$与 $S$均有

$$\rho(M_{T,S}^{(1,2)}N)<1; \tag{9}$$

此时,迭代

$$x_{j+1}=M_{T,S}^{(1,2)}Nx_j+M_{T,S}^{(1,2)}b \tag{10}$$

对任何 $x_0$均收敛到

$$x_\infty\equiv\lim_{j\to\infty}x_j=(I-M_{T,S}^{(1,2)}N)^{-1}M_{T,S}^{(1,2)}b=A_{T,S}^{(1,2)}b, \tag{11}$$

这个 $x_\infty$是方程组(1)的解.

证明　设 $A$有满秩分解 $A=EF$.若分裂(8)是正常的,则

$$M=\frac{1}{\alpha}EDF,\ 其中\ \alpha\neq 0 是实数,\ D 是可逆阵. \tag{12}$$

当条件(5)成立时, $M_{T,S}^{(1,2)}$与 $A_{T,S}^{(1,2)}N$均存在.若列满秩阵 $U$与 $V^*$满足条件

$$T=R(U)\quad 与\quad S=N(V),$$

则从(5)式可知 $FU$与 $VE$均可逆,且可算得

$$M_{T,S}^{(1,2)}=\alpha U(VEDFU)^{-1}V=\alpha U(FU)^{-1}D^{-1}(VE)^{-1}V,$$

$$M_{T,S}^{(1,2)}N=M_{T,S}^{(1,2)}M-M_{T,S}^{(1,2)}A=U(FU)^{-1}(I-\alpha D^{-1})F.$$

这样有

$$\rho(M_{T,S}^{(1,2)}N)=\rho(I-\alpha D^{-1}). \tag{13}$$

从此式可见，有多种方法选取 $\alpha$ 与 $D$ 使得 $\rho(M_{T,S}^{(1,2)}N)<1$. 例如，若取 $D$ 为只有正特征值的可逆阵时，$\alpha$ 应适合 $0<\alpha<2\lambda_{\min}(D)$. 注意，(13)式与满足条件(5)的 $T$，$S$ 的具体取法无关.

当 $\rho(M_{T,S}^{(1,2)}N)<1$ 时，迭代(10)对任何 $x_0$ 均收敛，其极限 $x_\infty$ 适合

$$x_\infty=M_{T,S}^{(1,2)}Nx_\infty+M_{T,S}^{(1,2)}b, \tag{14}$$

由此式可得(11)式的第一个等式.

由于

$$\begin{aligned}(I-M_{T,S}^{(1,2)}N)^{-1}M_{T,S}^{(1,2)}&=[I-U(VMU)^{-1}VN]^{-1}U(VMU)^{-1}V\\&=U[I-(VMU)^{-1}VNU]^{-1}(VMU)^{-1}V\\&=U(VMU-VNU)^{-1}V=U(VAU)^{-1}V=A_{T,S}^{(1,2)},\end{aligned} \tag{15}$$

所以，(11)式中的最后一个等式成立. 注意到 $R(N)\subset R(M)$，以 $M$ 左乘(14)式两边，可得 $Ax_\infty=b$.

**推论 1.1** 设 $A=EF$ 为 $A$ 的满秩分解. 令

$$M=\frac{1}{\alpha}EDF,\quad N=M-A,\quad T=R(F^*),\quad S=N(E^*), \tag{16}$$

其中 $\alpha\neq 0$，$D$ 可逆，则 $M_{T,S}^{(1,2)}=M^+$，且当 $D$ 为只有正特征值的可逆阵时，$\rho(M_{T,S}^{(1,2)}N)=\rho(M^+N)<1\Leftrightarrow 0<\alpha<2\lambda_{\min}(D)$.

当 $\rho(M^+N)<1$ 时，迭代

$$x_{j+1}=M^+Nx_j+M^+b \tag{17}$$

对任何 $x_0$ 均收敛到方程组的极小范数解

$$x_\infty=(I-M^+N)^{-1}M^+b=A^+b. \tag{18}$$

这里需要考虑一个问题：给定矩阵 $M\in C^{m\times n}$，如何选取子空间 $T\subset C^n$ 与 $S\subset C^m$ 使条件(5)成立？

**定理 1.2** 给定 $M\in C^{m\times n}$ 的满秩分解 $M=EDF$，其中 $D$ 为可逆阵. 则满足条件(5)的子空间 $T=R(U)$ 与 $S=N(V)$(其中 $U$，$V^*$ 均列满秩)的一般取法如下：

$$U=F^*D_1+P_1Y=[F^*,\ P_1]\begin{bmatrix}D_1\\Y\end{bmatrix}, \tag{19}$$

$$V=D_2E^*+ZP_2^*=[D_2,\ Z]\begin{bmatrix}E^*\\P_2^*\end{bmatrix}, \tag{20}$$

其中 $D_1$，$D_2$ 为任意可逆阵，$Y$，$Z$ 为任意阵，而 $P_1$，$P_2$ 均列满秩，且满足条件 $R(P_1)=N(F)$，$R(P_2)=N(E^*)$.

证明　因条件(5)等价于 $FU=D_1$ 与 $VE=D_2$ 均非奇异. 视 $D_1$ 与 $D_2$ 为已知，$U$ 与 $V$ 为未知，分别解此两个矩阵方程即得.

要指出的是，当 $U$，$V$ 取(19)与(20)所示的一般形式时，$M_{T,S}^{(1,2)}$ 一般不是 $M^+$，仅当取 $U=F^*D_1$ 与 $V=D_2E^*$ 时，$M_{T,S}^{(1,2)}=M^+$. 但当 $A=M-N$ 是正常分裂时，对满足条件(5)的任何 $T$，$S$ 均有 $\rho(M_{T,S}^{(1,2)}N)=\rho(M^+N)$.

## 2　两个典型例子

**例 1** 文[8]考虑了用基于正常分裂的 SOR 迭代法找线性方程组

$$Au=b \tag{21}$$

的极小范数解 $A^+b$ 的问题，这里

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & I_r & A_{12} \\ A_{21} & I_{m-r} & 0 & A_{22} \\ 0 & A_{21}^* & A_{11}^* & 0 \\ 0 & A_{22}^* & A_{12}^* & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & I_{m-r} & 0 \\ 0 & 0 & I_r \\ 0 & 0 & C^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & I_r \\ A_{21} & I_{m-r} & 0 \\ 0 & A_{21}^* & A_{11}^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 & C \\ 0 & I_{m-r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_r & 0 \end{bmatrix}\equiv EGF(\text{记})$$

$$\tilde{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad u=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix},\quad A_{11}\in C_r^{r\times r},\quad B=A_{21}A_{11}^{-1},\quad C=A_{11}^{-1}A_{12}.$$

现在我们来构造 $\tilde{A}$的正常分裂与相应的收敛迭代.取

$$M=\frac{1}{\alpha}EDF,\quad N=M-\tilde{A},\quad T=R(F^*),\quad S=N(E^*),\tag{22}$$

其中,$\alpha\neq 0$是待定参数,而 $D=\begin{bmatrix} A_{11} & -B^* & I_r \\ 0 & I_{m-r} & 0 \\ 0 & 0 & A_{11}^* \end{bmatrix}$.

不难证明,此时 $M_{T,S}^{(1,2)}=M^+$,$\rho(M_{T,S}^{(1,2)}N)=\rho(M^+N)=\rho(I-\alpha D^{-1}G)$,$D^{-1}G=\begin{bmatrix} I_r+H & 0 & 0 \\ A_{21} & I_{m-r} & 0 \\ 0 & B^* & I_r \end{bmatrix}$,

其中 $H=(A_{11}^*A_{11})^{-1}A_{21}^*A_{21}$.

因此可得

$$\rho(M_{T,S}^{(1,2)}N)=\rho(M^+N)<1\Leftrightarrow 0<\alpha<2/\lambda_{\max}(I+B^*B).\tag{23}$$

此时,迭代

$$u_{j+1}=M^+Nu_j+M^+\tilde{b}\tag{24}$$

对任何 $u_0$收敛到

$$u_\infty=(I-M^+N)^{-1}M^+\tilde{b}=\tilde{A}^+\tilde{b}.\tag{25}$$

需要指出的是,若 $T$与 $S$取如(19)、(20)所示的一般形式,则收敛条件(23)不变,但 $M_{T,S}^{(1,2)}$一般不是 $M^+$,相应的迭代

$$u_{j+1}=M_{T,S}^{(1,2)}Nu_j+M_{T,S}^{(1,2)}\tilde{b}\tag{26}$$

对任何 $u_0$收敛到 $u_\infty=\tilde{A}_{T,S}^{(1,2)}\tilde{b}$,这个 $u_\infty$一般也不是 $\tilde{A}^+\tilde{b}$,但是有

$$F^+Fu_\infty=\tilde{A}^+\tilde{A}u_\infty=\tilde{A}^+\tilde{b}.\tag{27}$$

这就是说,需要再计算 $F^+Fu_\infty$才能获得 $\tilde{A}^+\tilde{b}$,而上面取特殊的 $T$与 $S$时,计算是“一步到位”的.

**例 2**　文[7]研究了求解奇异 Hermite方程组 $Ax=b$的基于 $A$的 $P$—正则分裂的半收敛迭代.现我们用基于 $A$的正常分裂来构造收敛的迭代格式.

设 $A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{bmatrix}$为 Hermite阵,$\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}A_{11}=r$,$A_{11}$可逆.此时 $A$有分解

$$A=\begin{bmatrix} I \\ A_{12}^*A_{11}^{-1} \end{bmatrix}A_{11}[I,\ A_{11}^{-1}A_{12}].\tag{28}$$

取子空间 $L=R(E)$,$E$列满秩,满足条件 $L\oplus N(A)=C^n$,亦即 $R(A)\oplus L^\perp=C^n$.注意到 $N(A)=N([I,\ A_{11}^{-1}A_{12}])$,可知$[I,\ A_{11}^{-1}A_{12}]E$可逆.令

$$M=\frac{1}{\alpha}\begin{bmatrix} I \\ A_{12}^*A_{11}^{-1} \end{bmatrix}D[I,\ A_{11}^{-1}A_{12}],\quad N=M-A,\tag{29}$$

其中 $\alpha\neq 0$,$D$可逆,均待定.则 $A=M-N$是正常分裂,且可算得

$$M_{L,L^\perp}^{(1,2)} = \alpha E([I, A_{11}^{-1}A_{12}]E)^{-1} D^{-1}\left(E^*\begin{bmatrix} I \\ A_{12}^* A_{11}^{-1}\end{bmatrix}\right)^{-1} E^* \tag{30}$$

$$\rho(M_{L,L^\perp}^{(1,2)} N) = \rho(I - \alpha D^{-1} A_{11}). \tag{31}$$

今取 $D = A_{11}^{-1}$, 则

$$\rho(M_{L,L^\perp}^{(1,2)} N) < 1 \Leftrightarrow |1 - \alpha\lambda_i(A_{11}^2)| < 1 \Leftrightarrow 0 < \alpha < 2/\lambda_{max}(A_{11}^2). \tag{32}$$

此时, 迭代

$$x_{j+1} = M_{L,L^\perp}^{(1,2)} N x_j + M_{L,L^\perp}^{(1,2)} b \tag{33}$$

对任何 $x_0$ 收敛到 $x_\infty = (I - M_{L,L^\perp}^{(1,2)} N)^{-1} M_{L,L^\perp}^{(1,2)} b = A_{(L)}^{(-1)} b$. 这个 $x_\infty$ 具有性质:

$$x_\infty \in L \quad 与 \quad Ax_\infty = b. \tag{34}$$

文 [10] 考虑了约束的半正定方程组

$$Ax = b, \quad x \in L \tag{35}$$

的迭代解法, 其中 $A$ 为奇异的对称半正定阵, 且满足条件

$$b \in R(A) \quad 与 \quad L \oplus N(A) = R^n. \tag{36}$$

由性质 (34) 可知, 迭代 (33) 的极限 $x_\infty$ 恰好是 (35) 的惟一解, 因此, 上面所构造的正常分裂与迭代阵也适用于求解 (35). 注意到此时 $A_{11}$ 正定, 可取 $D = (E^T E)^{-1}$, 而

$$\rho(M_{L,L^\perp}^{(1,2)} N) < 1 \Leftrightarrow 0 < \alpha < 2\lambda_{max}(E^T E A_{11}) = 2/\lambda_{max}(E A_{11} E^T).$$

致谢 作者感谢审稿人为等式 (11) 的证明提供了简单明了的推导.

## [参考文献]


[1] Ben-Israel A, Greville T N E. Generalized Inverses: Theory and Applications[M]. 2th ed. New York: Springer-Verlag, 2002.

[2] 陈永林. 广义逆矩阵的理论与方法[M]. 南京: 南京师范大学出版社, 2005.

[3] Wang G, Wei Y, Qiao S. Generalized Inverses: Theory and Computations[M]. Beijing, New York: Science Press, 2004.

[4] Berman A, Neumann M. Proper splittings of rectangular matrices[J]. SIAM J Appl Math, 1976, 31(2): 307-312.

[5] Neumann M. Subproper splittings for rectangular matrices[J]. Linear Algebra Appl, 1976, 14(1): 41-51.

[6] 陈永林. 亏秩线性最小二乘问题的 AOR 迭代的半收敛性[J]. 南京师大学报: 自然科学版, 2005, 28(4): 1-7.

[7] Keller H B. On the solution of singular and semidefinite linear systems by iterations[J]. SIAM J Numer Anal, 1965, 2: 281-290.

[8] Miller V A, Neumann M. Successive overrelaxation methods for solving the rank deficient linear least squares problem[J]. Linaer Algebra Appl, 1987, 88/89: 533-557.

[9] Chen Yonglin, Tan Xueyuan. Semiconvergence criteria of iterations and extrapolated iterations and constructive methods of semiconvergent iteration matrices[J]. Appl Math Comput, 2005, 167(2): 930-956.

[10] Ern A, Giovangigli V. Projected iterative algorithms with application to multicomponent transport[J]. Linear Algebra Appl, 1997, 250: 289-315.


[责任编辑: 陆炳新]