具有低阶项的非散度椭圆方程的解在Morrey空间中的内估计

胡越[1,2]，王月山[3]

（1. 河南理工大学数学与信息科学学院，河南 焦作 454001）
（2. 郑州大学数学系，河南 郑州 450002）
（3. 中国工程物理研究院北京研究生部，北京 100088）

[摘要]　本文研究了具有低阶项的非散度椭圆方程

$$Lu = a_{ij}u_{x_ix_j} + b_iu_{x_i} + cu = f \quad a.e. \quad x \in \Omega$$

的解在Morrey空间中的内估计. 其中 椭圆方程的主系数 $a_{ij} \in VMO \cap L^\infty(\Omega)$，低阶项 b_i 和 c 属于适当的Morrey空间.

[关键词]　椭圆方程，Morrey 空间，VMO

[中图分类号] O175.25　[文献标识码] A　[文章编号] 1001-4616(2006)02-0012-05

Interior Estimates in Morrey Spaces of Solutions for Elliptic Equation in Nondivergence with the Lower Order Terms

Hu Yue[1], Wang Yueshan[2]

(1. College of Mathematics and Information Science, Henan Polytechnic University, Jiaozuo 454001, China)
(2. Department of Mathematics, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China)
(3. The Graduate School of China Academy of Engineering Physics, Beijing 100088, China)

Abstract: The aim of this note is to study interior estimate in Morrey spaces of solutions for elliptic equation in nondivergence form

$$Lu = a_{ij}(x)u_{x_ix_j} + b_iu_{x_i} + cu = f \quad a.e. \quad x \in \Omega$$

where the main coeffients of elliptic equation $a_{ij} \in VMO \cap L^\infty(\Omega)$ and the lower order terms b_i and c belong to suitable Morrey spaces.

Key words: elliptic equation, Morrey space, VMO

1　引言及主要结果

设 Ω 是 $\mathbf{R}^n(n \geqslant 3)$ 中的有界开集，本文我们研究非散度形式的椭圆方程

$$Lu = a_{ij}u_{x_ix_j} + b_iu_{x_i} + cu = f \quad a.e. \quad x \in \Omega \tag{1}$$

的解在 Morrey 空间中的内估计. 这里椭圆方程的主系数满足如下假设(H)：

$$\begin{cases} a_{i,j} \in VMO \cap L^\infty(\Omega), & \forall i,j = 1,\cdots,n; \\ a_{i,j}(x) = a_{j,i}(x), & \forall i,j = 1,\cdots n \quad a.e.\ x \in \Omega; \\ \exists \sigma > 0: \sigma^{-1}|\zeta|^2 \leqslant a_{i,j}(x)\zeta_i\zeta_j \leqslant \sigma|\zeta|^2; \end{cases} \tag{2}$$

对低阶项我们假设(F)：

$$b_i \in L^{\alpha(p),\frac{\alpha(p)\mu}{n}}(\Omega), \quad c \in L^{\frac{\alpha(p)}{2},\frac{\alpha(p)\mu}{2n}}(\Omega). \tag{3}$$

这里当 $1 < p < n$ 时 $\alpha(p) = n$；当 $p = n$ 时 $\alpha(p) > n$；当 $p > n$ 时 $\alpha(p) = p$.

收稿日期：2005-10-28.
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10426029).
作者简介：胡越，1960—，副教授，主要从事偏微分方程的教学与研究. E-mail: huu3y2@163.com

当低阶项系数 $b_i = c = 0$ 时，F. Chiarenza 等人在1991 年通过把解的导数表示成奇异积分和奇异积分交换子的形式得到了解在 L^p 中的内估计[1]；1993 年，G. Di Fazio 和 M. A. Ragusa 利用[1]中解的导数表示公式得到了解在 Morrey 空间 $L^{p,\lambda}$ 中的内估计[2]. 当低阶项不为0 时，[3,4] 研究了方程(1) 的解在 L^p 中的内估计. 1998 年范大山等人给出了 Morrey 空间内估计的另一种证明[5].

本文在假设(H) 和(F) 下研究方程(1) 的解在 Morrey 空间 $L^{p,\lambda}$ 中的内估计，得到：

定理1.1 在假设(H) 和(F) 下，如果 $u \in W^{2,p}(\Omega)$ 是方程(1) 的解，$f \in L^{p,\lambda}(\Omega)$，则 $D^2u \in L^{p,\lambda}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. 进一步，如果开集 $\Omega' \subset\subset \Omega$，则存在常数 $C = C(n,\lambda,p,M,\mathrm{dist}(\Omega',\partial\Omega))$ 使得

$$\| D^2u \|_{L^{p,\lambda}(\Omega')} \leqslant C(\|f\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} + \|u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}). \tag{4}$$

2 概念和引理

定义2.1[6,7] 称 Ω 上的局部可积函数 $f \in BMO(\Omega)$，如果

$$\sup_B \frac{1}{|B|}\int_B |f(x) - f_B| \,\mathrm{d}x = \|f\|_* < \infty.$$

这里 B 是包含在 Ω 中的球，$f_B = \frac{1}{|B|}\int_B f(x)\mathrm{d}x$. 设 $\rho > 0$，$B_\rho(x)$ 表示中心在 x，半径为 ρ 的球. 令

$$\eta(r) = \sup_{x\in\Omega,\rho\leqslant r} \frac{1}{|B_\rho|}\int_{\Omega\cap B_\rho(x)} |f(x) - f_{B_\rho}| \,\mathrm{d}x,$$

如果 $f \in BMO(\Omega)$ 且 $\lim\limits_{r\to 0^+}\eta(r) = 0$，我们称 $f \in VMO(\Omega)$.

定义2.2 设 $1 < p < \infty$，$0 < \lambda < n$. 如果

$$\|f\|^p_{L^{p,\lambda}(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega,\rho>0} \frac{1}{\rho^\lambda}\int_{B_\rho(x)\cap\Omega} |f(y)|^p \mathrm{d}y < \infty,$$

则称 $L^{p,\lambda}(\Omega) = \{f: \|f\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} < \infty\}$ 为 Ω 上的 Morrey 空间，如果对 Ω 的任意子集 Ω'，均有 $f \in L^{p,\lambda}(\Omega')$，则称 f 属于局部 $L^{p,\lambda}(\Omega)$ 空间，记作 $f \in L^{p,\lambda}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

引理2.1[8] 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个开子集，如果 $p' \leqslant p$，$\frac{n-\lambda}{p} \leqslant \frac{n-\lambda'}{p'}$，则 $L^{p,\lambda}(\Omega)$ 连续嵌入到 $L^{p',\lambda'}(\Omega)$，记作 $L^{p,\lambda}(\Omega) \hookrightarrow L^{p',\lambda'}(\Omega)$.

定义2.3 设 k 是 $\mathbf{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbf{R}$ 的可测函数. 称 $k(x)$ 是一个 Calderon-Zygmund 核(C-Z 核)，如果(1) $k \in C^\infty(\mathbf{R}^n\backslash\{0\})$；(2) $k(x)$ 是一个 n 阶齐次函数；(3) $\int_\Sigma k(x)\mathrm{d}\sigma_x = 0$. 这里 $\sum = \{x \in \mathbf{R}^n: |x| = 1\}$.

定义2.5 对 a. e. $x \in \mathbf{R}^n$ 和 $\forall \zeta \in \mathbf{R}^n\backslash\{0\}$，令

$$\Gamma(x,\zeta) = \frac{1}{n(2-n)\omega_n\sqrt{\det(a_{i,j})}}\Big(\sum_{i,j=1}^n A_{i,j}(x)\zeta_i\zeta_j\Big)^{\frac{2-n}{2}}.$$

这里($A_{i,j}$) 表示矩阵($a_{i,j}$) 的逆矩阵，ω_n 是 $\mathbf{R}^n$ 中单位球的测度. 我们记

$$\Gamma_i(x,\zeta) = \frac{\partial}{\partial\zeta_i}\Gamma(x,\zeta),\quad \Gamma_{i,j}(x,\zeta) = \frac{\partial^2}{\partial\zeta_i\partial\zeta_j}\Gamma(x,\zeta),$$

$$M = \max_{i,j=1,\cdots,n}\max_{|\beta|\leqslant 2n}\left\|\frac{\partial^\beta\Gamma(x,\zeta)}{\partial\zeta^\beta}\right\|_{L^\infty(\Omega\times\sum)}.$$

显然，a. e. $x \in \mathbf{R}^n$，$\Gamma_{ij}(x,\zeta)$ 是一个关于变量 ζ 的 Calderon-Zygmund 核.

引理2.6 ([2，定理2.3]) B 是一个 $\mathbf{R}^n$ 中的开球，$f \in L^{p,\lambda}(B)$，$1 < p < \infty$，$0 < \lambda < n$，$a \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$. 设 $k(x,z)$ 是一个 $\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n\backslash\{0\})$ 中的实可测函数，使得

(1) 对 a. e. $x \in B$，$k(x,z)$ 是一个 Calderon-Zygmund 核；

(2) $\max\limits_{|j|\leqslant 2n}\left\|\frac{\partial^j}{\partial z^j}k(x,z)\right\|_{L^\infty(B\times\sum)} = M < \infty.$

对任意 $\epsilon > 0$，令

$$K_\epsilon f(x) = \int_{|x-y|>\epsilon,x\in B} k(x,x-y)f(y)\mathrm{d}y,$$

$$G_\epsilon(a,f)(x)=\int_{|x-y|>\epsilon,x\in B}k(x,x-y)(a(x)-a(y))f(y)\mathrm{d}y.$$

那么存在 $K(x),C(a,f)\in L^{p,\lambda}(B)$,使得

$$\lim_{\epsilon\to 0}\|K_\epsilon f-Kf\|_{L^{p,\lambda}(B)}=0,\quad \lim_{\epsilon\to 0}\|C_\epsilon(a,f)-C(a,f)\|_{L^{p,\lambda}(B)}=0,$$

并且存在一个常数 C,使得

$$\|Kf\|_{L^{p,\lambda}(B)}\leqslant C\|f\|_{L^{p,\lambda}(B)},\ \|C(a,f)\|_{L^{p,\lambda}(B)}\leqslant C\|a\|_*\|f\|_{L^{p,\lambda}(B)}.$$

引理 2.7[2]　设 $a\in VMO\cap L^\infty(\mathrm{R}^n)$, $k(x,z)$ 满足引理 2.6 的条件, η 是 a 的 VMO 模. 那么对任意 $\epsilon>0$,存在 $\rho_0=\rho_0(\epsilon,\eta)>0$,使得对任意半径为 $r\in(0,\rho_0)$ 的球 B_r,当 $f\in L^{p,\lambda}(B_r)(1<p<\infty,0<\lambda<n)$ 有

$$\|C(a,f)\|_{L^{p,\lambda}(B_r)}\leqslant C\epsilon\|f\|_{L^{p,\lambda}(B_r)}.$$

引理 2.7[1]　(解的导数表示公式)　设 $n\geqslant 3$, $u\in W_0^{2,p}(B)$. 令 $\tilde{L}u(x)=a_{ij}u_{x_ix_j}$,那么对 $a.e.\ x\in B$,有

$$u_{x_ix_j}(x)=P.V.\int_B\Gamma_{ij}(x,x-y)\Big[\sum_{h,k=1}^n(a_{hk}(x)-a_{hk}(y)u_{x_hx_k}(y)+\tilde{L}u(y)\Big]\mathrm{d}y$$
$$+\tilde{L}u(x)\int_{|t|=1}\Gamma_i(x,t)t_j\mathrm{d}\sigma_t.$$

3　主要结果的证明

对 $i,j,h,k=1,\cdots,n$,令

$$S_{ijhk}(f)(x)=P.V.\int_{B_r}\Gamma_{ij}(x,x-y)(a_{hk}(x)-a_{hk}(y)f(y))\mathrm{d}y\tag{5}$$

这里 $B_r\subset\subset\Omega$, $0<r<\rho_0$, $f\in L^{p,\lambda}(B_r)$, $1<p<\infty$, $0<\lambda<n$. 由引理 2.7,我们可以固定 ρ_0 足够小,使得 $\sum_{i,j,h,k}\|S_{ijhk}\|<1$,这里的算子范数是算子 S_{ijhk} 从 $L^{p,\lambda}(B_r)$ 到自身的范数.

对 Ω 中半径不超过 ρ_0 的任意球 B_r,取 $\beta\in C_0^\infty(B_r)$,当 $x\in B'\subset cB$ 时 $\beta=1$,令 $v=\beta u$,则 $v\in W_0^{2,p}(B_r)$. 我们先来估计 $\tilde{f}=f-b_iu_{x_i}-cu$ 的 Morrey 范数.

首先我们有

$$\|b_iu_{x_i}\|_{L^{p,\frac{p\mu}{n}}(B_r)}\leqslant C\|b_i\|_{L^{\alpha(p),\frac{\alpha(p)}{n}\mu}(B_r)}\|D^2u\|_{L^p(B_r)}.\tag{6}$$

事实上,当 $1<p<n$ 时,利用 Hölder 不等式和 Sobolev 不等式

$$\Big(\rho^{-\frac{p\mu}{n}}\int_{B_\rho(x)\cap B_r}|b_iu_{x_i}|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\leqslant C\|b_i\|_{L^{n,\mu}(B_r)}\|D^2u\|_{L^p(B_r)}.$$

当 $p=n$ 时,注意到当 $1<q<n$ 时有 $W^{1,n}(B_r)\hookrightarrow W^{1,q}(B_r)$,选取 q 和 $\alpha>n$ 使得 $\frac{1}{q}-\frac{1}{n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{q^*}$,则

$$\Big(\rho^{-\mu}\int_{B_\rho(x)\cap B_r}|b_iu_{x_i}|^n\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{n}}\leqslant C\|b_i\|_{L^{\alpha,\frac{\alpha\mu}{n}}(B_r)}\|D^2u\|_{L^q(B_r)},$$

当 $p>n$ 时,注意到 $W^{1,p}(B_r)\hookrightarrow C^{0,1-\frac{n}{p}}(B_r)\hookrightarrow C^0(B_r)$,所以

$$\big(\rho^{-\frac{p\mu}{n}}\big)\Big(\int_{B_\rho(x)\cap B_r}|b_iu_{xi}|^p\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{p}}\leqslant C\|b_i\|_{L^{p,\frac{p\mu}{n}}(B_r)}\|D^2u\|_{L^p(B_r)},$$

综合上面三种情况,我们证明了(6). 同样,我们有

$$\|cu\|_{L^{p,\frac{p\mu}{n}}(B_r)}\leqslant C\|c\|_{L^{\frac{\alpha(p)}{2},\frac{\alpha(p)}{2n}\mu}(B_r)}\|u\|_{L^p(B_r)}.\tag{7}$$

由(6) 和(7) 我们有

$$\tilde{f}=f-b_iu_{x_i}-cu\in L^{p,\lambda_1}(B_r),\tag{8}$$

这里 $\lambda_1=\min\{\lambda,\frac{p\mu}{n}\}$.

我们再来考察 $\tilde{L}v$,注意到

$$\tilde{L}v = \tilde{L}(\beta u) = \beta\tilde{L}u + 2a_{ij}\beta_{x_i}u_{x_j} + uL\beta,$$

这里 $\tilde{L}u = \tilde{f} \in L^{p,\lambda_1}(B_r)$. 由于 $u \in W^{2,p}(B_r)$,所以 u 和 u_{x_j} 均属于 $W^{1,p}(B_r)$. 由 Sobolev 不等式和引理 2.1 可知 u 和 u_{x_j} 属于 $L^{p,p}(B_r)$. 再注意到 $a_{ij} \in L^{\infty}(\Omega)$, $\beta \in C_0^{\infty}(B_r)$, $p > \frac{p\mu}{n}$,所以 $\tilde{L}v \in L^{p,\lambda_1}(B_r)$. 由于 $v = \beta u \in W_0^{2,p}(B_r)$,所以由引理 2.7

$$v_{x_ix_j}(x) = P.V.\int_{B_r}\Gamma_{ij}(x,x-y)\Big(\sum_{h,k=1}^{n}(a_{hk}(x) - a_{hk}(y))v_{x_hx_k}(y)\Big)\mathrm{d}y + P.V.\int_{B_r}\Gamma_{ij}(x,x-y)\tilde{L}v(y)\mathrm{d}y + C_{ij}(x)\tilde{L}v(x) \qquad \forall i,j = 1,2,\cdots n. \tag{9}$$

这里 $\| C_{ij} \|_{L^{\infty}(\Omega)} = \| \int_{|t|=1}\Gamma_i(x,t)t_j\mathrm{d}\sigma_t \|_{L^{\infty}(\Omega)} \leqslant C$. 令

$$h = (h_{ij})_{i,j=1,2,\cdots n} = \Big(P.V.\int_{B_r}\Gamma_{ij}(x,x-y)\tilde{L}v(y)\mathrm{d}y + C_{ij}\tilde{L}v(x)\Big)_{i,j=1,2,\cdots n}.$$

则由引理 2.6 及 $\tilde{L}v \in L^{p,\lambda_1}(B_r)$ 知 $h_{ij} \in L^{p,\lambda_1}(B_r)$. 我们定义映射

$$T:[L^{p,\lambda_1}(B_r)]^n \to [L^{p,\lambda_1}(B_r)]^n \tag{10}$$

$$Tw = (Tw_{ij})_{i,j=1,2,\cdots n} = \Big(\sum_{h,k=1}^{n}S_{ijhk}(w_{hk}) + h_{ij}\Big)_{i,j=1,2,\cdots n},$$

由于 $\sum_{i,j,h,k}\| S_{ijhk} \| < 1$,所以算子 T 是一个 $[L^{p,\lambda_1}(B_r)]^n$ 上的压缩映射,从而 T 在 $[L^{p,\lambda_1}(B_r)]^n$ 上有惟一的不动点,设为 $(w_{ij})_{i,j=1,2,\cdots n}$. 又由(9) 知 $(v_{x_ix_j})_{i,j=1,2,\cdots n}$ 也是 $[L^p(B_r)]^n$ 中的不动点,由不动点的惟一性知 $(v_{x_ix_j})_{i,j=1,2,\cdots n} = (w_{ij})_{1,2,\cdots n} \in [L^{p,\lambda_1}(B_r)]^n$,即 $D^2v \in L^{p,\lambda_1}(B_r)$.

如果 $\lambda = \lambda_1$, 则 $D^2v \in L^{p,\lambda}(B_r)$,由 $\beta \in C_0^{\infty}(B_r)$ 知 $D^2u \in L^{p,\lambda}(B_{\theta r})$,从而 $D^2u \in L_{\mathrm{loc}}^{p,\lambda}(\Omega)$. 如果 $\lambda_1 < \lambda$(这时 $\lambda_1 = \frac{p\mu}{n}$), 由于 $D^2v \in L^{p,\lambda_1}(B_r)$, 所以 $D^2u \in L_{\mathrm{loc}}^{p,\lambda_1}(\Omega)$.

由 $u \in W^{2,p}(\Omega)$, $D^2u \in L_{loc}^{p,\lambda_1}(\Omega)$,利用 Sobolev 不等式,对半径不超过 ρ_0 的球 B_r,

$$\Big(\rho^{-(p+\lambda_1)}\int_{B_\rho(x)\cap B_r}| u_{x_i} |^p\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant \rho^{-\frac{\lambda_1}{p}}\Big(\int_{B_\rho(x)\cap B_r}| u_{x_i} |^{p^*}\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{p^*}} \leqslant C\rho^{-\frac{\lambda_1}{p}}\Big(\int_{B_\rho(x)\cap B_r}| D^2u |^p\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant C\| D^2u \|_{L^{p,\lambda_1}(B_r)}$$

即 $u_{x_i} \in L^{p,p+\lambda_1}(B_r)$. 类似于(6),(7) 的证明可得

$$\| b_iu_{x_i} \|_{L^{p,\frac{2p\mu}{n}}(B_r)} \leqslant C\| b_i \|_{L^{\alpha(p),\frac{\alpha(p)}{n}\mu}(B_r)}\| D^2u \|_{L^{p,\lambda_1}(B_r)}, \tag{11}$$

$$\| cu \|_{L^{p,\frac{2p\mu}{n}}(B_r)} \leqslant C\| c \|_{L^{\alpha(p),\frac{\alpha(p)}{n}\mu}(B_r)}\| D^2u \|_{L^{p,\lambda_1}(B_r)}, \tag{12}$$

由(11) 和(12) 知 $\tilde{f} \in L^{p,\lambda_2}(B_r)$,其中 $\lambda_2 = \min\{\lambda,\frac{2p\mu}{n}\}$,又 $u_{x_i} \in L^{p,p+\lambda_1}(B_r)$,所以

$$\Big(\rho^{-(2p+\lambda_1)}\int_{B_{\rho(x)}\cap B_r}| u^p |\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant \rho^{-1+\frac{\lambda_1}{p}}\Big(\int_{B_\rho(x)\cap B_r}| Du |^{p^*}\mathrm{d}y\Big)^{\frac{1}{p^*}} \leqslant C\| Du \|_{L^{p+\lambda_1}(B_r)}.$$

这样 $\tilde{L}v \in L^{p,\lambda_2}(B_r)$, $\lambda_2 = \min\{\lambda,\frac{2p\mu}{n},p + \frac{pu}{n}\} = \min\{\lambda,\frac{2p\mu}{n}\}$. 类似于(10),我们可以定义映射 T: $[L^{p,\lambda_2}(B_r)]^n \to [L^{p,\lambda_2}(B_r)]^n$,相类似讨论可得 $D^2u \in L_{\mathrm{loc}}{}^{p,\lambda_2}(\Omega)$. 如果 $\lambda_2 = \lambda$,则结论得证. 如果 $\lambda_2 < \lambda$,我们继续这个程序即可. 这样,$D^2u \in L_{\mathrm{loc}}^{p,\lambda}(\Omega)$.

最后,我们来证明估计式(4). 在(9) 两边同时取 $L^{p,\lambda}(B_r)$ 范数,得

$$\| D^2v \|_{L^{p,\lambda}(B_r)} \leqslant C\Big(\sum_{h,k=1}^{n}\| a_{hk} \|_*\| D^2v \|_{L^{p,\lambda}(B_r)} + \| \tilde{L}v \|_{L^{p,\lambda}(B_r)}\Big) \tag{13}$$

选取 B_r 的半径 $r < \rho_0$ 足够小,使得 $C\sum_{h,k=1}^{n}\| a_{hk} \|_* < \frac{1}{2}$,则由(13) 得

$$\| D^2v \|_{L^{p,\lambda}(B_r)} \leqslant C\| \tilde{L}v \|_{L^{p,\lambda}(B_r)}, \tag{14}$$

类似于(6),(7),我们有

$$\| b_i v_{x_i} \|_{L^{p,\lambda}(B_r)} \leqslant C(2r)^{\frac{\mu}{n}} \| b_i \|_{L^{\alpha(p),\frac{\alpha(p)}{n}\mu}(B)} \| D^2 v \|_{L^{p,\lambda}(B_r)}, \tag{15}$$

$$\| cv \|_{L^{p,\lambda}(B_r)} \leqslant C(2r)^{\frac{\mu}{n}} \| c \|_{L^{\frac{\alpha(p)}{2},\frac{\alpha(p)}{2n}\mu}(B_r)} \| D^2 v \|_{L^{p,\lambda}(B_r)}, \tag{16}$$

注意到

$$\tilde{L}v = a_{ij}\beta_{x_ix_j} u + 2a_{ij}\beta_{x_i}u_{x_j} + \beta f - b_i\beta_{x_i} u - b_i v_{x_i} - cv, \tag{17}$$

将(15) - (17) 带入到(14),并选取 r 足够小,使得

$$C(2r)^{\frac{\mu}{n}}\left(\| b_i \|_{L^{\alpha(p),\frac{\alpha(p)}{n}\mu}(B_r)} + \| C \|_{L^{\frac{\alpha(p)}{2},\frac{\alpha(p)}{2n}\mu}(B_r)} \right) < \frac{1}{2},$$

则

$$\begin{aligned} \| D^2 u \|_{L^{p,\lambda}(B_{\theta r})} &\leqslant \| D^2 v \|_{L^{p,\lambda}(B_r)} \\ &\leqslant C\left(\| f \|_{L^{p,\lambda}(B_r)} + \frac{1}{(1-\theta)^2 r^2} \| u \|_{L^{p,\lambda}(B_r)} + \frac{1}{(1-\theta)\, r} \| Du \|_{L^{p,\lambda}(B_r)} \right), \end{aligned} \tag{18}$$

引入加权半范数

$$\Phi_k = \sup_{0<\theta<1} (1-\theta)^k r^k \| D^k u \|_{L^{p,\lambda}(B_{\theta r})}, \qquad k = 0,1,2$$

那么(18) 变形为

$$\Phi_2 \leqslant C(r^2 \| f \|_{L^{p,\lambda}(B_r)} + \Phi_1 + \Phi_0). \tag{19}$$

由[9],对任意 $\epsilon > 0$,存在常数 $c(n)$,使得插值不等式

$$\Phi_1 \leqslant \varepsilon \Phi_2 + \frac{C}{\varepsilon}\Phi_0, \tag{20}$$

成立. 这样

$$\Phi_2 \leqslant C(r^2 \| f \|_{L^{p,\lambda}(B_r)} + \Phi_0),$$

从而

$$\| D^2 u \|_{L^{p,\lambda}(B_{\theta r})} \leqslant \frac{C}{(1-\theta)^2}\left(\| f \|_{L^{p,\lambda}(B_r)} + \| u \|_{L^{p,\lambda}(B_r)} \right),$$

即(4) 成立. 定理1.1证毕.

[参考文献]

[1] Chiarenza F, Frasca M, Longo P. Interior $W^{2,p}$ estimates for nondivergence elliptic equations with discontinuous coefficients [J]. Ricerche Mat, 1991,40: 149 - 168.

[2] Fazio G Di, Ragusa M A. Interior estimates in Morrey spaces for strong solutions to nondivergence form equations with discontinuous coefficients[J]. J Funct Anal, 1993, 112: 241 - 256.

[3] Vitanza C. w^{2p}-Regularity for a class of elliptic second order equations with discontinous coefficients[J]. Le Matematiche, 1992, 47: 177 - 186.

[4] Vitanza C. A new contribution to the w^{2p}-Regularity for a class of elliptic second order equations with discontinous coefficients [J]. Le Matematiche,1993,48:287 - 296.

[5] Fan D S, Lu S Z, Yang D C. Regularity in Morrey spaces of strong solutions to nondivergence elliptic equations with VMO coefficients[J]. Georgian Math J, 1998,5(5):425 - 440.

[6] John F, Nirenberg L. On function of bounded mean oscillation[J]. Comm Pure Appl Math, 1961,14:415 - 426.

[7] Sarason D. On function of vanishing mean oscillation[J]. Trans Amer Math Soc,1975,207:391 - 405.

[8] Chiarenza F, Frasca M. Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function[J]. Rend Mat Appl,1987,7:273 - 279.

[9] Gilbarg G, Trudinger N S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order[M]. 2nd ed. Berlin: Spriger-Verlag, 1983.

[责任编辑:陆炳新]