

具有年龄结构的 SIS 模型的研究

宋伊琳, 崔景安

(南京师范大学数学与计算机科学学院, 江苏 南京 210097)

[摘要] 研究具有年龄结构的非自治的 SIS 模型. 把个体的一生分为未成年和成年两个阶段, 只有未成年者会感染疾病. 在模型中, 假设接触感染率为时间的周期函数, 研究模型解的渐近行为, 得到了疾病传播的阈值.

[关键词] 年龄结构, 阈值, SIS 模型

[中图分类号] O175.1 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2006)02-0021-05

Study on SIS Model with Age Structure

Song Yilin, Cui Jing'an

(School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

Abstract: In this paper, we study a nonautonomous SIS model with age structure. The life history of all individuals are divided into two classes: immature and mature, and the immature can be infected only. Assuming that the connect and infectious rate is a periodic function, we study the asymptotic behavior of the solution for this model. The threshold be obtained.

Key words: age structure, threshold, SIS model

0 引言

年龄结构是影响种群增长规律和传染病流行规律的一个重要因素. 不同年龄阶段的个体具有不同的生育力和死亡率, 同时年龄也影响着疾病在种群中的传染率和恢复率.

在用常微分方程描述的传染病理论模型中, 无论年龄大小, 通常都假设个体对疾病有相同的传染力、免疫力和恢复力. 在这种假设下, 建立了经典的 SIS、SIR、SIRS 等模型^[1,2]. 对于这类模型已经有丰硕的研究成果, 并成功应用于实际的传染病控制之中^[1-7]. 然而这些模型仍然有待完善. 事实上, 从流行病学的角度来考虑, 不同种类的传染病有其不同的特点. 有些疾病多发于幼年, 而有些疾病多发于成年. 如麻疹、流行性腮腺炎和猩红热等传染病, 仅仅是在儿童中传播, 或者在儿童中传播的可能性更大. 所以考虑成年和未成年发病率不一样的疾病时, 更科学的作法是, 把个体的一生分为未成年和成年两个阶段分别来考虑. 为了更准确地预测传染病的传播规律, 在建立传染病动力学模型时, 要反映出不同年龄段的个体的传染率和恢复率等因素的变化.

具有年龄结构的人口模型研究已经有了比较完善的结果^[2,8]. 其中连续模型的描述及分析要比离散模型困难一些. 连续模型中, 与时间无关的线性模型研究也已比较完善, 但是, 与时间 t 有关的模型还有大量工作要做.

本文研究一类包含未成年染病者的 SIS 模型. 把个体一生分成两个阶段: 未成年和成年, 并且假设成年者不感染疾病, 而未成年者为这一疾病的易感者. 我们的模型中有一个重要的参量: 接触感染率 $\mu(t)$, 它是个周期函数, 反映疾病的发生随季节发生变化, 周期为一年. 对于接触感染率是常量的情况, 肖燕妮进行了讨论, 得出了地方病平衡点和疾病消除平衡点的全局渐近稳定性, 并确定了阈值^[7]. 我们的目的是得

收稿日期: 2005-06-09.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10471066).

作者简介: 宋伊琳, 女, 1981—, 硕士研究生, 主要从事生物数学的学习与研究. E-mail: yilin8110@yahoo.com.cn

通讯联系人: 崔景安, 1963—, 教授, 博士生导师, 主要从事生物数学的教学与研究. E-mail: cuija@njnu.edu.cn

出具有周期接触感染率的 SIS 模型的阈值,分析模型的渐近性质.

1 模型和结论

W. G. Aliello, H. I. Freedman 和 J. Wu 提出了如下模型:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \alpha y(t) - dx(t) - \alpha e^{-dr} y(t - \tau) \\ \dot{y}(t) &= \alpha e^{-dr} y(t - \tau) - \beta y^2(t),\end{aligned}\quad (1)$$

其中 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别代表未成年个体和成年个体的密度, α, τ, β, d 为正的常量.

我们把未成年者分成两部分:易感者 S 和感染者 I , 即

$$x(t) = S(t) + I(t). \quad (2)$$

下面给出基本假设:

- (1) 所有新出生的个体均为易感者.
- (2) α 为出生率.
- (3) $\mu(t)$ 是时间 t 的连续周期函数, 周期为 1, 它表示从易感者变成感染者的比率.
- (4) d 是易感者和感染者的死亡率.
- (5) r 是感染者变成易感者的比例系数.
- (6) τ 为出生到成年的时间.

根据假设, 对应于(1)的具有年龄结构的 SIS 模型为:

$$\begin{aligned}S(t) &= \alpha y(t) - dS(t) - \alpha e^{-dr} y(t - \tau) - \mu(t)S(t)I(t) + rI(t) \\ I(t) &= \mu(t)S(t)I(t) - (d + r)I(t) \\ \dot{y}(t) &= \alpha e^{-dr} y(t - \tau) - \beta y^2(t).\end{aligned}\quad (3)$$

考虑生态因素, 设初始条件均为正:

$$S(\theta) = \varphi_1(\theta), I(\theta) = \varphi_2(\theta), y(\theta) = \psi(\theta), \theta \in [-\tau, 0], (\varphi_1, \varphi_2, \psi) \in C_+^3. \quad (4)$$

其中 $C_+^3 = C([-\tau, 0], R_+^3)$, $R_+^3 = \{(S, I, y) : S > 0, I > 0, y > 0\}$.

由(2), 系统(3)等价于

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \alpha y(t) - dx(t) - \alpha e^{-dr} y(t - \tau) \\ I(t) &= I(t)(\mu(t)x(t) - (d + r) - \mu(t)I(t)) \\ \dot{y}(t) &= \alpha e^{-dr} y(t - \tau) - \beta y^2(t).\end{aligned}\quad (5)$$

初始条件(4)变为:

$$x(\theta) = \varphi(\theta) = \varphi_1(\theta) + \varphi_2(\theta), I(\theta) = \varphi_2(\theta), y(\theta) = \psi(\theta), \theta \in [-\tau, 0], (\varphi_1, \varphi_2, \psi) \in C_+^3. \quad (6)$$

由初始条件的连续性, 有

$$\varphi(\theta) = \int_{-\tau}^0 \alpha \psi(t) e^{dt} dt. \quad (7)$$

由文献[8], 我们有:

引理 1.1 设 $x(t) > 0, y(t) > 0, t \in [-\tau, 0]$, 则系统(1.1)有正平衡点 (x^*, y^*) , 且为全局渐近稳定的.

设 $(x(t), I(t), y(t))$ 为满足初始条件(6)和(7)的方程(5)的任意解, 根据引理 1.1 及(5)的形式, 我们知道对所有的 $t > 0$, $(x(t), I(t), y(t)) > 0$ 且有界.

由文献[9], 我们有:

引理 1.2 设 $a(t), b(t)$ 为连续的周期为 ω 的函数 ($t \in [0, +\infty)$), 且 $a(t) > 0$, 对于系统 $\dot{x} = x(b(t) - a(t)x)$, 若 $\overline{b(t)} > 0$, 则上面系统存在一个正的 ω -周期解并且全局渐近稳定; 另一方面, 若 $\overline{b(t)} < 0$, 有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$. 其中 $\overline{b(t)} = \int_0^\omega b(t) dt$.

本文的主要结论是:

定理 1.1 若 $\overline{R_0} > 1$, 则 $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = P(t)$; 若 $\overline{R_0} < 1$, 则 $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$, 其中 $P(t)$ 是方程

$$I(t) = I(t)(\mu(t)x^* - (d + r) - \mu(t)I(t)) \quad (8)$$

的全局渐近稳定的周期解,其周期为 1,其中 $R_0(t) = \frac{\mu(t)x^*}{d+r}$, $\overline{R_0} = \int_0^1 R_0(t) dt$.

2 主要结果的证明

定理 1.1 的证明 假设 $\overline{R_0} > 1$, 由引理 1.1 知, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^* > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y^* > 0$. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 T_1 , 当 $t \geq T_1$ 时, $x^* - \varepsilon < x(t) < x^* + \varepsilon$. 由(5) 第二个方程得到

$$\dot{I}(t) \leq I(t)(\mu(t)(x^* + \varepsilon) - (d+r) - \mu(t)I(t)),$$

并且

$$\dot{I}(t) \geq I(t)(\mu(t)(x^* - \varepsilon) - (d+r) - \mu(t)I(t)) \quad (t \geq T_1).$$

令

$$Q(t) = \mu(t)x^* - (d+r),$$

$$Q_{+\varepsilon}(t) = \mu(t)(x^* + \varepsilon) - (d+r),$$

$$Q_{-\varepsilon}(t) = \mu(t)(x^* - \varepsilon) - (d+r).$$

$$R_0(t) = \mu(t)x^*/(d+r), \overline{R_0} = \int_0^1 R_0(t) dt, \bar{\mu} = \int_0^1 \mu(t) dt.$$

由 $\overline{R_0} > 1$, 有 $\bar{Q} = \int_0^1 Q(t) dt > 0$. 考虑方程

$$\dot{I}(t) = I(t)(Q(t) - \mu(t)I(t)), \quad (9)$$

$$\dot{u}(t) = u(t)(Q_{+\varepsilon}(t) - \mu(t)u(t)), \quad (10)$$

和

$$\dot{v}(t) = v(t)(Q_{-\varepsilon}(t) - \mu(t)v(t)). \quad (11)$$

根据引理 1.2, 对(9)~(11), 可分别求得周期解如下:

$$P(t) = \{e^{\int_0^1 Q(s) ds} - 1\} \left\{ \int_t^{t+1} e^{-\int_s^t Q(\tau) d\tau} \mu(s) ds \right\}^{-1},$$

$$u^p(t) = \{e^{\int_0^1 Q_{+\varepsilon}(s) ds} - 1\} \left\{ \int_t^{t+1} e^{-\int_s^t Q_{+\varepsilon}(\tau) d\tau} \mu(s) ds \right\}^{-1},$$

和

$$v^p(t) = \{e^{\int_0^1 Q_{-\varepsilon}(s) ds} - 1\} \left\{ \int_t^{t+1} e^{-\int_s^t Q_{-\varepsilon}(\tau) d\tau} \mu(s) ds \right\}^{-1}.$$

下证对 $\forall \eta > 0$, 存在 $\zeta > 0$, 当 $0 < \varepsilon < \zeta$ 时, 有

$$|u^p(t) - P(t)| < \eta/2,$$

$$|v^p(t) - P(t)| < \eta/2.$$

改写 $u^p(t)$,

$$u^p(t) = \{e^{\int_0^1 Q(s) ds} e^{\varepsilon \int_0^1 \mu(s) ds} - 1\} \left\{ e^{-\varepsilon \int_t^{t+1} \mu(\tau) d\tau} \int_t^{t+1} e^{-\int_s^t Q(\tau) d\tau} \mu(s) ds \right\}^{-1}, \xi \in [t, t+1]$$

则

$$\begin{aligned} u^p(t) - P(t) &= e^{\int_0^1 Q(s) ds} e^{\varepsilon \int_0^1 \mu(s) ds} \left\{ e^{-\varepsilon \int_t^{t+1} \mu(\tau) d\tau} \int_t^{t+1} e^{-\int_s^t Q(\tau) d\tau} \mu(s) ds \right\}^{-1} \\ &\quad - \left\{ e^{-\varepsilon \int_t^{t+1} \mu(\tau) d\tau} \int_t^{t+1} e^{-\int_s^t Q(\tau) d\tau} \mu(s) ds \right\}^{-1} \\ &= e^{\int_0^1 Q(s) ds} \left\{ \int_t^{t+1} e^{-\int_s^t Q(\tau) d\tau} \mu(s) ds \right\}^{-1} + \left\{ \int_t^{t+1} e^{-\int_s^t Q(\tau) d\tau} \mu(s) ds \right\}^{-1} \\ &= \left\{ \int_t^{t+1} e^{\int_s^t Q(\tau) d\tau} \mu(s) ds \right\}^{-1} \left\{ e^{\int_0^1 Q(s) ds} e^{\varepsilon \int_0^1 \mu(s) ds} e^{\varepsilon \int_t^{t+1} \mu(\tau) d\tau} - e^{\varepsilon \int_t^{t+1} \mu(\tau) d\tau} - e^{\int_0^1 Q(s) ds} + 1 \right\} \\ &= \left\{ \int_t^{t+1} e^{\int_s^t Q(\tau) d\tau} \mu(s) ds \right\}^{-1} \left\{ e^{\int_0^1 Q(s) ds} e^{\varepsilon (\int_0^1 \mu(s) ds + \int_t^{t+1} \mu(\tau) d\tau)} - e^{\varepsilon \int_t^{t+1} \mu(\tau) d\tau} - e^{\int_0^1 Q(s) ds} + 1 \right\}. \end{aligned}$$

其中

$$\int_t^{t+1} e^{\int_t^s \mu(\tau) d\tau} \mu(s) ds \geq \int_t^{t+1} \mu(s) ds = \int_0^1 \mu(s) ds = \bar{\mu} > 0.$$

而

$$\begin{aligned} e^{\int_0^1 Q(s) ds} e^{\varepsilon(\int_0^1 \mu(s) ds + \int_t^1 \mu(\tau) d\tau)} - e^{\varepsilon \int_t^1 \mu(\tau) d\tau} - e^{\int_0^1 Q(s) ds} + 1 = \\ e^{\int_0^1 Q(s) ds} [e^{\varepsilon(\int_0^1 \mu(s) ds + \int_t^1 \mu(\tau) d\tau)} - 1] + 1 - e^{-\varepsilon \int_t^1 \mu(\tau) d\tau} = \\ e^{\bar{Q}} [e^{\varepsilon(\int_0^1 \mu(s) ds + \int_t^1 \mu(\tau) d\tau)} - 1] + 1 - e^{-\varepsilon \int_t^1 \mu(\tau) d\tau}. \end{aligned}$$

考虑

$$e^{\bar{Q}} [e^{\varepsilon(\int_0^1 \mu(s) ds + \int_t^1 \mu(\tau) d\tau)} - 1] + 1 - e^{-\varepsilon \int_t^1 \mu(\tau) d\tau}, \quad (12)$$

注意到

$$1 - e^{-\varepsilon \int_t^1 \mu(\tau) d\tau} \leq e^{\varepsilon \int_t^1 \mu(\tau) d\tau} - 1. \quad (13)$$

事实上,因为

$$(e^{\varepsilon \int_t^1 \mu(\tau) d\tau} - 1)^2 \geq 0,$$

所以

$$(e^{\varepsilon \int_t^1 \mu(\tau) d\tau})^2 - 2e^{\varepsilon \int_t^1 \mu(\tau) d\tau} + 1 \geq 0.$$

或

$$e^{\varepsilon \int_t^1 \mu(\tau) d\tau} - 1 \leq (e^{\varepsilon \int_t^1 \mu(\tau) d\tau})^2 - e^{\varepsilon \int_t^1 \mu(\tau) d\tau},$$

从而

$$1 - e^{-\varepsilon \int_t^1 \mu(\tau) d\tau} \leq e^{\varepsilon \int_t^1 \mu(\tau) d\tau} - 1.$$

则(13)得证.

由 $\xi \in [t, t+1]$, 有 $e^{\varepsilon(\int_0^1 \mu(s) ds + \int_t^1 \mu(\tau) d\tau)} \leq e^{\varepsilon \bar{\mu}}$. 另一方面, 从(12)式得

$$\begin{aligned} e^{\bar{Q}} [e^{\varepsilon(\int_0^1 \mu(s) ds + \int_t^1 \mu(\tau) d\tau)} - 1] + 1 - e^{-\varepsilon \int_t^1 \mu(\tau) d\tau} \leq \\ e^{\bar{Q}} [e^{\varepsilon(\int_0^1 \mu(s) ds + \int_t^1 \mu(\tau) d\tau)} - 1] + e^{\varepsilon \bar{\mu}} - 1 \leq e^{\bar{Q}} (e^{\varepsilon \bar{\mu}} - 1) + e^{\varepsilon \bar{\mu}} - 1 = (e^{\varepsilon \bar{\mu}} - 1)(e^{\bar{Q}} + 1), \end{aligned}$$

所以

$$0 \leq u^p(t) - I^p(t) \leq \frac{(e^{\varepsilon \bar{\mu}} - 1)(e^{\bar{Q}} + 1)}{\mu}.$$

取

$$\zeta = \frac{1}{\mu} \ln \left(1 + \frac{\bar{\mu} \eta}{2(e^{\bar{Q}} + 1)} \right),$$

则当 $0 < \varepsilon < \zeta$ 时,有

$$|u^p(t) - I^p(t)| < \frac{\eta}{2},$$

从而有

$$u^p(t) < I^p(t) + \frac{\eta}{2}.$$

同理可证,当 ε 充分小时,有

$$|v^p(t) - I^p(t)| < \frac{\eta}{2},$$

则有

$$v^p(t) > I^p(t) - \frac{\eta}{2}.$$

设 $u(t)$ 与 $v(t)$ 分别是系统(10)~(11)的解,且 $u(t_1) = v(t_1) = I(t_1)$,所以对 $t \geq T_1$,有

$$v(t) \leq I(t) \leq u(t).$$

又由引理1.2,有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = u^p(t), \lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = v^p(t).$$

所以对 $\forall \eta > 0, \exists T_2 \geq T_1$, 当 $t \geq T_2$ 时, 有

$$|u(t) - u^p(t)| < \frac{\eta}{2},$$

则有

$$u(t) < u^p(t) + \frac{\eta}{2}.$$

同时

$$|v(t) - v^p(t)| < \frac{\eta}{2},$$

则有

$$v(t) > v^p(t) - \frac{\eta}{2}.$$

所以有

$$v^p(t) - \frac{\eta}{2} < v(t) \leq I(t) \leq u(t) < u^p(t) + \frac{\eta}{2} \quad (t \geq T_2).$$

所以对 $\forall \eta > 0, \exists T_2$, 当 $t \geq T_2$ 时, 有

$$P(t) - \eta < v^p(t) - \frac{\eta}{2} < v(t) \leq I(t) \leq u(t) < u^p(t) + \frac{\eta}{2} < P(t) + \eta,$$

即

$$|I(t) - P(t)| < \eta.$$

所以

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (I(t) - P(t)) = 0.$$

若 $\bar{R}_0 \leq 1$, 类似可证 $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = 0$.

综上, 定理 1.1 得证.

注: 定理 1.1 给出了疾病消除的阈值, 它是 \bar{R}_0 . 当 $\bar{R}_0 < 1$ 时, 疾病消除, 而当 $\bar{R}_0 > 1$ 时, 疾病成为地方病.

[参考文献]

- [1] Anderson R M, May R M. Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control[M]. New York: Oxford University Press, 1991.
- [2] 马知恩, 周文仓, 王稳地, 等. 传染病动力学的数学建模及研究[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [3] Diekmann O, Heesterbeek J A P. Mathematical epidemiology of infectious diseases: Model building, analysis and interpretation[C]//Wiley Series in Mathematical and Computational Biology. Chichester: Wiley, 2000.
- [4] Hethcote H W. Qualitative analysis of communicable disease models[J]. Math Biosci, 1976, 28(3/4): 335-356.
- [5] Diekmann O, Heesterbeek J A P, Metz J A J. On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 in models for infectious diseases in heterogeneous populations[J]. J Math Biol, 1990, 28(4): 365-382.
- [6] Van den Driessche P, James Watmough. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission[J]. Mathematical Biosciences, 2002, 180(1/2): 29-48.
- [7] 肖燕妮. 种群生态-流行病复合动力系统的研究[D]. 北京: 中国科学院博士研究生学位论文, 2001.
- [8] Aiello W G, Freedman H I, Wu J. Analysis of a model representing stage-structure population growth with state-dependant time delay[J]. SIAM J Appl Math, 1992, 52(3): 855-869.
- [9] Cui J, Chen L. The effect of diffusion on the time varying Logistic population growth[J]. Computers Math Applic, 1998, 36(3): 1-9.

[责任编辑: 陆炳新]