泛圈图的一个充分条件

伍玮[1],戚志如[2],袁秀华[1],孙志人[1]

(1. 南京师范大学数学与计算机科学学院,江苏 南京 210097)
(2. 江苏警官学院数学物理学教研室,江苏 南京 210012)

[**摘要**] 在文[1]中给出定理,设 G 是一个 n - 阶 2 - 连通图且 $\delta(G)\geq t$,若对于 G 的任意两个不相邻的点 u 和 v,均有 $|N(u)\cup N(v)|\geq n-t$ 成立,则 G 是一个泛圈图或 $G\cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$. 本文的目的在于将此定理的条件减弱,只对图中距离为 2 的点进行讨论,得出了泛圈图的一个充分条件. 文中主要用数学归纳法对定理进行证明,先在引理中给出了几种特殊情况的证明,接着在定理的证明中讨论了一般情形.

[**关键词**] 2-连通图,泛圈图,最小度

[**中图分类号**] O157.5 [**文献标识码**] A [**文章编号**] 1001-4616(2006)02-0031-04

A Sufficient Condition for Pancyclic Graphs

Wu Wei[1], Qi Zhiru[2], Yuan Xiuhua[1], Sun Zhiren[1]

(1. School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)
(2. Department of Forensic Science, Jiangsu Police Officer College, Nanjing 210012, China)

Abstract: In [1], the author gave the theorem that let G be a 2-connected graph with $|V(G)|=n$ and $\delta(G)\geq t$, if $|N(u)\cup N(v)|\geq n-t$ for any nonadjacent vertices in G, then G is pancyclic or $G\cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$. The aim of this paper is to relax the hypothesis to just consider the vertices with distance 2 and we obtain a sufficient condition for pancyclic graph. We prove the theorem mainly by induction. Firstly we give the proof for some special cases, and then we prove the theorem particularly.

Key words: 2-connected graph, pancyclic graph, minimum degree

0 引言

本文所讨论的图均为简单图. 符号 V,E,δ 分别表示图 G 的顶点集,边集和最小度. 对于 G 中的任意一点 v,$d(v)$ 表示点 v 的度数. 设 H 是图 G 的一个子图且 $v\in V(G)$,记 $N_H(v)=\{u\in V(H)\mid uv\in E(G)\}$ 且 $d_H(v)=|N_H(v)|$. 特别地,当 $H=G$ 时,简记 $N_H(v)$ 和 $d_H(v)$ 为 $N(v)$ 和 $d(v)$. 用 C_m 表示一个长为 m 的圈,并称 C_m 为 m - 圈. 设 $C=x_1x_2\cdots x_m$ 为一个长为 m 的圈. 定义 $N_C^+(v)=\{x_{i+1}\in V(C)\mid x_iv\in E(G)\}$,$N_C^-(v)=\{x_{i-1}\in V(C)\mid x_iv\in E(G)\}$ 这里下标按模 m 计算. 图 G 的任意两点 u 和 v 之间的距离记为 $d(u,v)$.

设 G 是一个 n 阶图,若对每一个 $k(3\leq k\leq n)$,G 都含有长为 k 的圈,则称 G 为泛圈图. 文献[2]-[11]中给出了若干有关圈及泛圈图定理,其中文[8]证明了若 G 是 n 阶 2- 连通图,G 是 $[k_{1,2}, P_5, P_5^+]$-free,则 G 是泛圈图或圈. 其中文[5]和文[6]分别证明了 $t=3,t=4$ 时,若 G 是一个 n 阶 2 - 连通图且 $\delta(G)\geq t$,对于 G 的任意两个距离为 2 的点 u 和 v,$|N(u)\cup N(v)|\geq n-t$,则 G 是一个泛圈图或 $G\cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$. 徐军在[1]中给出定理,设 G 是一个 n - 阶 2 - 连通图且 $\delta(G)\geq t$,若对于 G 的任意两个不相邻的点 u 和 v 均

收稿日期: 2005-07-15.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10371055).
作者简介: 伍玮,女,1981—,硕士,主要从事图论与组合优化的学习与研究. E-mail: njnuwuwei@126.com
通讯联系人: 孙志人,1964—,博士,教授,主要从事图论与组合优化的教学与研究. E-mail: zrsun@njnu.edu.cn

有 $|N(u)\cup N(v)|\geqslant n-t$ 成立,则 G 是一个泛圈图或 $G\cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ 并提出了以下问题:设 G 是一个 n 阶 2 - 连通图且 $\delta(G)\geqslant t$,对于 G 的任意两个距离为2的点 u 和 v,若 $|N(u)\cup N(v)|\geqslant n-t$,则 G 是一个泛圈图或 $G\cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$. 在本文中,我们将证明以下主要定理:

定理1　对任意的 t(显然 $t\geqslant 2$) 和 G 的任意两个距离为2的点 u 和 v,若 $|N(u)\cup N(v)|\geqslant n-t$,则 G 是一个泛圈图或 G 是以下情况之一:(1) G 是一个 5 - 圈,(2) $G\cong K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$,本文中用到的其它未作说明的术语和记号可在文献[7]中找到.

1　引理和定理的证明

为了证明及叙述的简便,下面设 G 是一个 n 阶 2 - 连通图,$\delta(G)\geqslant t$,且对于 G 的任意两个不相邻的点 u 和 v 有 $|N(u)\cup N(v)|\geqslant n-t$ 成立,G 与 $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ 不同构.

引理1　设 $d(u,v)=2$ 且 $S\subseteq V(G)\setminus\{u,v\}$,若 $|S|\geqslant t-1$,则 $(N(u)\cup N(v))\cap S\neq\varnothing$.

证明　若 $(N(u)\cup N(v))\cap S=\varnothing$ 则 $N(u)\cup N(v)\subseteq V(G)\setminus(S\cup\{u,v\})$ 有

$|N(u)\cup N(v)|\leqslant n-|S\cup\{u,v\}|\leqslant n-(t-1+2)=n-t-1<n-t$ 与题设矛盾,结论成立.

引理2　G 含有 3- 圈,4- 圈或 G 是 5- 圈.

证明　如果 $\forall x\in V(G)$ 有 $d(x)=\delta(G)=t$,当 $t=2$

$|V|=4$ 时,$G\cong K_{2,2}$,矛盾.

$|V|=5$ 时,$|N(u)\cup N(v)|=3$,且 $n-\delta=3$,满足题目条件,此时 G 是一个 5 - 圈.

$|V|\geqslant 6$ 时,　$|N(u)\cup N(v)|=3$,而 $n-\delta\geqslant 4$ 与条件矛盾.

当 $t\geqslant 3$ 时,则设 $C_k=x_1x_2\cdots x_k$ 为 G 中的一个长度最小的奇圈.(若 G 只含偶圈,则为二部图,设 $G=G_{p,q}$,有 $pt=qt=|E|$,即 $p=q$ 矛盾.)假设 G 不含三圈,则 k 为 $\geqslant 5$ 的奇数,若在 $G\setminus C_k$ 中存在一点与 C_k 上的至少三个点相邻,设三个点按顺时针方向依次为 v_i,v_j,v_k,由图中无三圈,则三点不相邻. 若 $j-i,k-j$ 为偶数,则有更短奇圈,矛盾. 否则不妨设 $j-i$ 为奇数且 $\geqslant 3$,$k-j$ 为偶数. 若 $k-j>2$ 可得矛盾. 若 $k-j=2$,则原来的圈至少长为 $j-i+4$ 而我们可以找到 $j-i+2$ 的圈. 因此 C_k 中无弦且 $G\setminus C_k$ 中的任一顶点至多和 C_k 上的两点相邻,否则就与 C_k 是 G 中长度最小的奇圈矛盾. 故有

$$\sum_{i=1}^{k}(d(x_i)-2)=\sum_{i=1}^{k}d(x_i)-2k\leqslant 2n-2k,\text{由 } d(x_i)=t,i=1,2\cdots k,\text{从而 } n\geqslant\frac{tk}{2}\tag{1}$$

设 $N(x_1)\setminus V(C_k)=\{v_1,v_2\cdots v_{t-2}\}$,由 C_k 的最小性知 $v_1,v_2\cdots v_{t-2}\notin N(x_k)$ 且 $\{v_1,v_2\cdots v_{t-2}\}$ 为独立集,于是有 $d(v_1,x_k)=d(v_2,x_k)=\cdots=d(v_{t-2},x_k)=2$. 令 $S=\{v_2,v_3\cdots v_{t-2},x_2,x_3\}$,则 $|S|=t-1$,由引理1 $(N(x_k)\cup N(v_1))\cap S\neq\phi$,又 $N(x_k)\cap S=\phi$,所有 $N(v_1)\cap S\neq\phi$,从而 $v_1x_3\in E(G)$,同理 $v_ix_3\in E(G)$,$i=2,3,\cdots t-2$. 因为 $d(x_3)=t$,有 $(N(x_1)\cup N(x_3))\cap\Big(V(G)\setminus\Big(V(C_k)\cup\{v_1,v_2,\cdots v_{t-2}\}\Big)\Big)=\phi$,而 $d(x_1,x_3)=2$,由引理1 $\Big|V(G)\setminus\Big(V(C_k)\cup\{v_1,v_2,\cdots,v_{t-2}\}\Big)\Big|\leqslant t-2$. 于是有

$$n=|V(G)|=|(V(G)\setminus V(C_k))\cup V(C_k)|\leqslant 2(t-2)+k\tag{2}$$

由(1)(2),$\frac{tk}{2}\leqslant n\leqslant 2(t-2)+k$,从而 $t\leqslant 2$,矛盾. 由此,$C_3\subset G$.

如果 $\exists x\in V(G)$ 使 $d(x)\geqslant t+1$,设 $N(x)=\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$,其中 $k=|N(x)|\geqslant t+1$. 若 G 不含 3 - 圈,则对 $\forall x_i,x_i\in N(x),i\neq j$,有 $d(x_i,x_j)=2$. 但 $|N(x_i)\cup N(x_j)|\leqslant|V(G)-\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}|\leqslant n-(t+1)<n-t$,与条件矛盾. 此时 $C_3\subset G$.

下面证明 $C_4\subset G$.

设 $C_3=x_1x_2x_3x_1$ 是 G 中的一个 3 - 圈,假设 G 是不存在 4 - 圈. 令 $T=V(G)\setminus V(C_3)$,则有 $N_T(x_i)\cap N_T(x_j)=\phi,1\leqslant i\neq j\leqslant 3$. 否则存在 C_4. 此外,对 $\forall y_i\in N_T(x_i),i=1,2,3$. 有 $\{y_1,y_2,y_3\}$ 为独立集,否则同样存在 C_4. 不失一般性考虑 $y_1\in N_T(x_1)$ 和 x_2,由 $d(y_1,x_2)=2$,而 $(N(y_1)\cup N(x_2))\cap N_T(x_3)=\phi$,由 $\delta(G)\geqslant t$ 及引理1知 $|N_T(x_3)|\leqslant t-2$,类似,$|N_T(x_i)|\leqslant t-2,i=1,2$. 若 $|N_T(x_i)|<t-2,i=1$,

2,3,则 $|N(x_i)|<t\leqslant\delta(G)$,$i=1,2,3$,矛盾. 即 $|N_T(x_i)|=t-2$.

存在 $z_2\in N(y_2)\backslash\{x_2\}$,使得 $z_2x_2\notin E(G)$(这样的点一定存在,否则由 $d_T(x_2)=t-2$,则 $d(y_2)=t-3+1<t$,矛盾.) 同时 $y_1z\notin E(G)$,否则 $d(y_1,y_2)=2$,$|\{x_3\}\cup N_T(x_3)|=t-1$,但 $(N(y_1)\cup N(y_2))\cap\Big(\{x_3\}\cup N_T(x_3)\Big)=\phi$,与引理1矛盾. 同理存在 $z_3\in N(y_3)\backslash\{x_3\}$,使得 $z_3x_i\notin E(G)$,$z_3y_1\notin E(G)$. 因此由 $t\geqslant 2$,有

$|N(y_1)\cup N(x_2)|\leqslant n-|(N(x_1)\backslash\{x_2,x_3\})\cup(N(x_3)\backslash\{x_1,x_2\})\cup\{x_2,z_2,z_3\}|\leqslant n-(t-2+t-2+3)=n-(t+t-1)<n-t.$

与定理条件矛盾.

因此有 $C_4\subset G$.

引理3 设 u 是 $G\backslash C_m$ 的一点,且 $|N_{C_m}(u)|\geqslant 2$,$\forall x\in N^+_{C_m}(u)$ 或 $x\in N^-_{C_m}(u)$,x 和 $N(u)\backslash V(C_m)$ 中的点都不相邻,则 G 有 $(m+1)-$圈.

证明 必有下面三种情况之一成立

(1) 存在 $x_i,x_{i+1}\in N_{C_m}(u)$.

(2) 存在 $x_i,x_j\in N_{C_m}(u)$ 使 $x_{i+1},x_{j+1}\in E(G)$.

(3) 存在 $x_i,x_j\in N_{C_m}(u)$,$(i<j)$ 且 $\{x_{i+1},x_{i+2},\cdots x_{j-1}\}\cap N_{C_m}(u)=\phi$,则存在 $x_k\in\{x_{j+2},x_{j+3},\cdots x_i\}$,使 x_k 和 x_{j+1} 相邻,且 x_{k-1} 和 x_{i+1},u 之一相邻.

由(1)~(3)之一,可以构造出 $(m+1)-$圈. 令 $x_i,x_j\in N_{C_m}(u)$.

若(1)~(3)均不成立,则当 $d(x_{i+1},x_{j+1})=2$ 时,$|N(x_{i+1})\cup N(x_{j+1})|\leqslant n-|N^+_{C_m}(u)|-|\{u\}|-|N(u)\backslash V(C_m)|<n-\delta$,矛盾.

当 $d(x_{i+1},x_{j+1})\geqslant 3$ 时,$\forall v\in N(x_{j+1})\backslash\{x_j\}$,$v=x_k\in\{x_{j+2},x_{j+3},\cdots,x_i\}$ 时,x_{k-1} 和 x_{i+1},u 均不相邻. $v=x_k\in\{x_{i+1},x_{i+2},\cdots,x_{j-1}\}$ 时,x_k 和 x_{i+1},u 均不相邻. 由 $d(x_{i+1},u)=2$,而 $|N(x_{i+1})\cup N(u)|\leqslant n-|N(x_{j+1})\backslash\{x_j\}|-|\{x_{i+1},u\}|<n-\delta$,矛盾.

定理1的证明 由引理2假设 G 与 $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ 不同构且 G 不是 $5-$圈,则只要证明 G 是一个泛圈图. 令 $T=G\backslash C_m$.

情况1 若存在 $u\in T$ 及 $x_k\in N^+_{C_m}(u)$ 或 $x_k\in N^-_{C_m}(u)$ 满足 $N(x_k)\cap(N(u)\backslash V(C_m))\neq\phi$,利用数学归纳法,由引理2知 G 含有3-圈,4-圈. 设 G 含有 m-圈,$m+1$-圈,令 $u_1\in N(x_k)\cap(N(u)\backslash V(C_m))$,那么 $x_1x_2\cdots x_{k-1}uu_1x_k\cdots x_mx_1$ 或 $x_1x_2\cdots x_ku_1ux_{k+1}\cdots x_mx_1$ 为一长为 $m+2$ 的圈.

情况2 若对任意的 $u\in T$,$N^+_{C_m}(u)$ 或 $N^-_{C_m}(u)$ 中的任意一点和 $N(u)\backslash V(C_m)$ 中的点都不相邻. 我们已有 G 含有3-圈. 设 G 含有 $m-$圈,下面证明 G 含有 $(m+1)-$圈.

情形2.1 存在 $u\in T$ 使 $|N_{C_m}(u)|\geqslant 2$,由引理3知 G 含有 $(m+1)$-圈.

情形2.2 对任意 $u\in T$,$\max\{|N_{C_m}(u)|\}=1$,则 $|T|\geqslant\delta(G)\geqslant t$.

情形2.2.1 存在 $x,y\in T$,$d(x,y)=2$,由 $\max\{|N_{C_m}(u)|\}=1$,及定理的条件可得 $n-t\leqslant|N(x)\cup N(y)|\leqslant n-m$ 成立,即 $m\leqslant t$,这样对圈 C_m 上的每一个点 x_i,$1\leqslant i\leqslant m$,都存在 $y_i\in T$,使 $x_iy_i\in E(G)$,且当 $i\neq j$ 时,$y_i\neq y_j$,$x_iy_j\notin E(G)$ 否则与 $\max\{|N_{C_m}(u)|\}=1$ 矛盾. 若在 C_m 上存在点 x_i,$1\leqslant i\leqslant m$,使得 $x_ix_{i+2}\notin E(G)$,有 $d(x_i,x_{i+2})=2$. 注意到 $|N_T(y_i)|\geqslant\delta(G)-1\geqslant t-1$. 由引理1:$(N(x_i)\cup N(x_{i+2}))\cap N_T(y_i)\neq\phi$,即 x_i 或 x_{i+2} 与 y_i 在 T 中有一个公共邻点,设为 w_1,如果 w_1 与 x_{i+2} 相邻,则 G 存在 $(m+1)$-圈. 如果 w_1 与 x_i 相邻,则如上讨论有 $(N(x_i)\cup N(x_{i+2}))\cap N_T(w_1)=\phi$,即 x_i 或 x_{i+2} 与 w_1 在 T 中有一公共邻点,设为 w_2. 若 w_2 与 x_{i+2} 相邻,则结论成立. 反之则可以找到 w_3,如此一直下去,若所有的 w_i 都不与 x_{i+2} 相邻,则 x_i 是 G 的割点,矛盾. 若对 C_m 上的每一个点 x_i,$(1\leqslant i\leqslant m)$ 都有 $x_ix_{i+2}\in E(G)$. 不妨设 $x_1x_3\in E(G)$,当 $y_1y_3\in E(G)$ 时,结论成立. 当 $y_1y_3\notin E(G)$ 时,由于 $|N_T(y_3)|\geqslant t-1$,且 $y_1,x_2\notin N_T(y_3)$,$y_1x_2\notin E(G)$,从而 $d(y_1,x_2)=2$,由引理1,$|(N(y_1)\cup N(x_2))\cap N_T(y_3)|\neq\phi$,令 $u\in(N(y_1)\cup N(x_2))\cap N_T(y_3)$,则 $x_1x_2uy_3x_3x_5x_6\cdots x_{m-1}x_m$ 或 $x_1y_1uy_3x_3x_5x_6\cdots x_{m-1}x_m$ 为 G 中的 $(m+1)$-圈.

情形2.2.2　若 $\forall x,y \in T$,均有 $xy \in E(G)$,这时 $G(T)$ 是 G 的完全子图.若 $m < \frac{n}{2}$,则 G 含有 $(m+1)$-圈.

下设 $m \geqslant \frac{n}{2}$,由 G 的2连通性,不失一般性,设 C_m 上有点 $x_i,x_j(i>j)$,在 T 中分别有邻点 $y_i,y_j(y_i \neq y_j)$ 并且使 $|i-j|\pmod{m}$ 最小.由于 $|T| \geqslant \delta(G) \geqslant t$,所以当 $1<|i-j|\pmod{m} \leqslant t$ 时,由 $G(T)$ 是 G 的完全子图,可得 G 中的 $(m+1)$-圈.当 $|i-j|\pmod{m} > t$ 时,由 $|i-j|\pmod{m}$ 的最小性以及 $\max\{|N_{C_m}(u)|\}=1$,$(N(x_{i+2}) \cup N(x_{j+2})) \cap T = \phi$,因此 $x_{i+2}x_{j+2} \in E(G)$,则取 $x \in T, x \neq y_i,y_j$,可得 G 中的 $(m+1)$-圈.当 $|i-j|\pmod{m}=1$ 时,不妨设 $i=2,j=1$.若 $(N(x_3) \cup N(x_5)) \cap T = \phi$,由引理1知 $x_3x_5 \in E(G)$,G 存在 $(m+1)$-圈.若 $(N(x_3) \cup N(x_5)) \cap T \neq \phi$,则 $|T| \geqslant t \geqslant 3$,$G(T)$ 是 G 的完全子图,可得 G 中的 $(m+1)$-圈.

类似可得,G 有 $(m+2)$-圈.

综上,定理成立.

因为在 $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ 中,对图中距离为2的点 u,v,$|N(u) \cup N(v)| = n-\delta$,可得如下推论.

推论6　设 G 是一个 n 阶2-连通图且 $\delta(G) \geqslant t$,若对于 G 的任意两个距离为2的点 u 和 v,均有 $|N(u) \cup N(v)| \geqslant n-t+1$,则 G 是一个泛圈图.

[参考文献]

[1] 徐军. Hamiltonian圈的泛圈性的一个充分条件[J]. 应用数学学报, 2001, 24(2): 310-313.

[2] Aldres Rel, Holton D A, Min Z K. A degree characterization of pancyclicity[J]. Discrete Math, 1994, 127: 23-29.

[3] Gould G J. Advances on the Hamiltonian problem-a survey[J]. Graphs and Combin, 2003,19: 7-52.

[4] 卞秋香, 孙志人. 2-连通图过指定边的长圈[J]. 南京师大学报: 自然科学版, 2003, 26(2): 10-14.

[5] 柳林, 高增科. 邻集并与圈的泛圈性[J]. 太原机械学院学报, 1991, 13(2): 76-79.

[6] 储茂权, 王建中. 泛圈图的一个充分条件[J]. 安徽师范大学学报:自然科学版, 1993, 16(1): 14-18.

[7] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Applications[M]. London: The Macmillan Press Ltd, 1976.

[8] 桂预凤,李刚,王彬. 泛圈图的一个充分条件[J]. 武汉理工大学学报:交通科学与工程版, 2004, 28(4): 583-584.

[9] 叶森林,张克民. 点泛图性的领域并条件[J]. 高校应用数学学报, 1998, 13A(1): 79-86.

[10] 周小跃. 泛圈图的一个新的充分条件[J]. 东南大学学报:自然科学版, 2000, 30(6): 114-118.

[11] 朱卓宇,吴宗玉. 邻集交和边泛图性质[J]. 东南大学学报:自然科学版, 1997, 27(3): 124-126.

[责任编辑:陆炳新]