第 29 卷第 3 期 南京师大学报(自然科学版) Vol. 29 No. 3
2006 年 9 月 JOURNAL OF NANJING NORMAL UNIVERSITY(Natural Science) Sep,2006

L-模糊拓扑空间的一组新的弱分离公理

徐国华,方锦暄

(南京师范大学数学与计算机科学学院,江苏 南京 210097)

[摘要] 在 L-模糊拓扑空间中引入准分明集的分明度的概念,在此基础上,定义了一组新的弱分离公理,即 W_iT_3,W_iT_4($i=1,2,3$)分离公理,它们比文[1]中的 WT_3,WT_4 分离性还要弱,并且证明了它们在 L-模糊拓扑空间满层的条件下彼此等价,最后证明了它们也是一般拓扑学中分离性概念在 Lowen 意义下的'好的推广".

[关键词] L – 模糊拓扑空间,准分明集的分明度,分离公理

[中图分类号] O189.13 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2006)03-0001-04

Set of New Weak Separation Axioms in L-fuzzy Topological Spaces

Xu Guohua, Fang Jinxuan

(School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

Abstract: In this paper, a set of weak separation axioms in L-fuzzy topological spaces are defined and studied by giving the concept of the crisp-degree of pseudocrisp set. We discuss certain relationships among them. When the L-fuzzy topological space is fully stratified, they are equivalent each other. It is shown that they are" good extensions "of the separation properties for general topology in the sence of R. Lowen.

Key words: L-fuzzy topological space, crisp-degree of pseudocrisp set, separation axiom

0 引言

分离性是一般拓扑学中的重要概念,国内外已经有不少研究,本文将在文[1]的基础上引入准分明集的分明度的概念,定义一组新的弱分离公理,即 W_iT_3,W_iT_4($i=1,2,3$)分离公理,它们比 WT_3,WT_4 分离性要弱,同时证明在满层的条件下,W_1T_3,W_2T_3,W_3T_3 彼此等价,W_1T_4,W_2T_4,W_3T_4 彼此等价,且 $W_iT_4 \Rightarrow W_iT_3 \Rightarrow WT_2 \Rightarrow WT_1 \Rightarrow WT_0$($i=1,2,3$),它们也是 Lowen 意义下的'好的推广".

1 预备知识

在本文中,X 是非空集合,L 表示具有逆合对应的完全分配格,即模糊格,0 和 1 分别表示 L 的最小元和最大元,$M(L)$ 表示 L 中的全部分子之集,$M^*(L^X)$ 表示 L^X 中全部分子之集,(L^X,δ) 为 L- 模糊拓扑空间,简记为 $LFTS$,我们将分子 x_λ(LF 集 A)的一切远域和闭远域之集分别记为 $\eta(x_\lambda)$ 和 $\eta^-(x_\lambda)$(相应地,$\eta(A)$ 和 $\eta^-(A)$),常值 LF 集记为 α^*($\alpha \in L$),记 $\mathrm{hgt}A = \vee \{A(x) \mid x \in X\}$,其余没有定义的符号均来自于文[2].

为了讨论的方便,我们把弱 T 分离性概念[1] 简述如下:

定义 1.1 设 (L^X,δ) 是 $LFTS$,对任何 $x_\lambda, y_\mu \in M^*(L^X)$,$x \neq y$,

收稿日期:2006-01-15.

基金项目:江苏省教育厅自然科学基金资助项目(04KJB110061).

作者简介:徐国华,1961—,博士研究生,副教授,主要从事模糊分析和拓扑的教学与研究. E-mail:xugh@263.net

通讯联系人:方锦暄,1943—,教授,博士生导师,主要从事模糊分析和拓扑的教学与研究. E-mail:jxfang@njnu.edu.cn

(1) 若有 $P \in \eta(x_\lambda)$,使 $y_\mu \leqslant P$,或有 $Q \in \eta(y_\mu)$,使 $x_\lambda \leqslant Q$,则称 (L^X,δ) 为弱 T_0 空间,简记为 WT_0 空间;

(2) 若有 $P \in \eta(x_\lambda)$ 和 $Q \in \eta(y_\mu)$,使 $y_\mu \leqslant P$ 且 $x_\lambda \leqslant Q$,则称 (L^X,δ) 为弱 T_1 空间,简记为 WT_1 空间;

(3) 若有 $P \in \eta(x_\lambda)$ 和 $Q \in \eta(y_\mu)$,使 $P \vee Q \supset (\lambda \vee \mu)^*$,则称 (L^X,δ) 为弱 T_2 空间,或弱 Hausdorff 空间,简记为 WT_2 空间.

定义 1.2　设 $A \in L^X$,若存在 $\mu \in L - \{0\}$,使 $A(x) > 0$ 当且仅当 $A(x) \geqslant \mu$,则称 A 为准分明 LF 集.

定义 1.3　设 (L^X,δ) 是 $LFTS$,若对任何非零准分明闭集 $A \in L^X$ 和 $x_\lambda \in M^*(L^X)$,当 $x \notin \mathrm{supp}\, A$ 时,有 $P \in \eta(x_\lambda)$ 和 $Q \in \eta(A)$,使 $P \vee Q \supset (\lambda \vee \mathrm{hgt}A)^*$,则称 (L^X,δ) 是弱正则空间,称 WT_1 的弱正则空间为弱 T_3 空间,简记为 WT_3 空间.

定义 1.4　设 (L^X,δ) 是 $LFTS$,若对任二非零准分明闭集 A 和 B,当 $\mathrm{supp}\, A \cap \mathrm{supp}\, B = \emptyset$ 时,有 $P \in \eta(A)$ 和 $Q \in \eta(B)$,使 $P \vee Q \supset (\mathrm{hgt}A \vee \mathrm{hgt}B)^*$,则称 (L^X,δ) 是弱正规空间,称 WT_1 的弱正规空间为弱 T_4 空间,简记为 WT_4 空间.

注 1.1　定义中的 $\eta(x_\lambda)$ 和 $\eta(A)$ 等可分别用 $\eta^-(x_\lambda)$ 和 $\eta^-(A)$ 来代替.

定理 1.1　设 (L^X,δ) 是 $LFTS$,则 $WT_4 \Rightarrow WT_3 \Rightarrow WT_2 \Rightarrow WT_1 \Rightarrow WT_0$,反之不然.

定义 1.5　设 (L^X,δ) 是 $LFTS$,$A \in L^X$,若 $\mathrm{supp}\, \overline{A} = \mathrm{supp}\, A$,则称 A 是伪闭的.

定理 1.2　设 (L^X,δ) 是 $LFTS$,则 (L^X,δ) 是 WT_1 空间当且仅当对任何 $x_\lambda \in M^*(L^X)$,x_λ 是伪闭的.

2　W_iT_3 和 W_iT_4 分离性($i = 1,2,3$)

定义 2.1　设 A 为 L^X 中的一个准分明集,令 $p(A) = \vee\{\mu \in L - \{0\} \mid A(x) > 0$ 当且仅当 $A(x) \geqslant \mu, \forall x \in X\}$,则称 $p(A)$ 为准分明集 A 的分明度.

注 2.1　若 A 为 L^X 中的准分明集,则当 $A(x) > 0$ 时,$A(x) \geqslant p(A) > 0$.

注 2.2　A 为 L^X 中的分明 LF 集 $\Leftrightarrow p(A) = 1$.

注 2.3　$x_\lambda \in L^X$,则 $p(x_\lambda) = \lambda$.

引理 2.1　设 A,B 为 L^X 中的两个准分明集,且 $A \subset B$,若 $\mathrm{supp}\, A = \mathrm{supp}\, B$,则 $p(A) \leqslant p(B)$.

证明　由 $\mathrm{supp}\, A = \mathrm{supp}\, B$ 可知 $\forall x \in X$,$A(x) > 0$ 当且仅当 $B(x) > 0$,对于 $\forall x \in X$,若 $B(x) > 0$,则 $A(x) > 0$,故 $A(x) \geqslant p(A)$,又 $A \subset B$,所以 $B(x) \geqslant A(x) \geqslant p(A)$,即得 $p(A) \leqslant p(B)$.

定义 2.2　设 (L^X,δ) 为 $LFTS$,若对 X 上的任一非零准分明闭集 A 和 $x_\lambda \in M^*(L^X)$,当 $x \notin \mathrm{supp}\, A$ 时,有 $P \in \eta(x_\lambda)$,$Q \in \eta(A)$,使 $P \vee Q \supset (\lambda \vee p(A))^*$,则称 (L^X,δ) 为 W_1 - 正则空间,WT_1 的 W_1 - 正则空间称为 W_1T_3 空间.

定义 2.3　设 (L^X,δ) 为 $LFTS$,若对 X 中任一非零准分明伪闭集 A 和 $x_\lambda \in M^*(L^X)$,当 $x \notin \mathrm{supp}\, A$ 时,有 $P \in \eta(x_\lambda)$,$Q \in \eta(\overline{A})$,使 $P \vee Q \supset (\lambda \vee p(A))^*$,则称 (L^X,δ) 为 W_2 - 正则空间,WT_1 的 W_2 - 正则空间称为 W_2T_3 空间.

定义 2.4　设 (L^X,δ) 为 $LFTS$,若对 X 中任一非零准分明伪闭集和 $x_\lambda \in M^*(L^X)$,当 $x \notin \mathrm{supp}\, A$ 时,有 $P \in \eta(x_\lambda)$,$Q \in \eta(A)$,使 $P \vee Q \supset (\lambda \vee p(A))^*$,则称 (L^X,δ) 为 W_3 - 正则空间,WT_1 的 W_3 - 正则空间称为 W_3T_3 空间.

注 2.4　W_3 - 正则 $\Rightarrow W_2$ - 正则 $\Rightarrow W_1$ - 正则,
　　弱正则 $\Rightarrow W_2$ - 正则 $\Rightarrow W_1$ - 正则.

定理 2.1　若 (L^X,δ) 为满层的 $LFTS$,则 W_1 - 正则 $\Leftrightarrow W_2$ - 正则 $\Leftrightarrow W_3$ - 正则.

证明　只要证 W_1 - 正则 $\Rightarrow W_3$ - 正则.

设 A 为任一非零准分明伪闭集和 $x_\lambda \in M^*(L^X)$,且 $x \notin \mathrm{supp}\, A$,则易证 $\overline{A \wedge p(A)^*}$ 是准分明闭集,且 $x \notin \mathrm{supp}\, \overline{A \wedge p(A)^*}$.

事实上,$\forall y \in X$,$\overline{A \wedge p(A)^*}(y) > 0 \Rightarrow \overline{A}(y) \wedge \overline{p(A)^*}(y) > 0 \Rightarrow \overline{A}(y) > 0$,由 A 伪闭,知 $A(y) > 0 \Rightarrow A(y) \geqslant p(A) \Rightarrow \overline{A \wedge p(A)^*}(y) \geqslant (A \wedge p(A)^*)(y) = A(y) \wedge p(A) = p(A) \Rightarrow \overline{A \wedge p(A)^*}$ 是准分明闭集,且 $p(\overline{A \wedge p(A)^*}) \geqslant p(A)$,又 $\overline{A \wedge p(A)^*}(x) \leqslant \overline{A}(x)$ 及 $x \notin \mathrm{supp}\, A = \mathrm{supp}\, \overline{A}$,知 $\overline{A \wedge p(A)^*}(x) = 0$,

即 $x \notin \text{supp}\, \overline{A \wedge p(A)^*}$.

故由 W_1－正则性知有 $P \in \eta^-(x_\lambda)$，$Q \in \eta^-(\overline{A \wedge p(A)^*})$，使 $P \vee Q \supset [\lambda \vee p(\overline{A \wedge p(A)^*})]^* \supset [\lambda \vee p(A)]^*$.

又 $\forall y \in X$，$A(y) > 0 \Rightarrow \overline{A \wedge p(A)^*}(y) \geqslant A(y) \wedge p(A) = p(A) > 0$，有 $\overline{A \wedge p(A)^*}(y) \nleqslant Q(y)$，由 (L^X,δ) 为满层空间，知 $\overline{A}(y) \wedge p(A) \nleqslant Q(y) \Rightarrow p(A) \nleqslant Q(y) \Rightarrow A(y) \nleqslant Q(y) \Rightarrow Q \in \eta^-(A)$.

综上，即证得 (L^X,δ) 是 W_3－正则空间.

推论 2.1 在满层 $LFTS(L^X,\delta)$ 中，$W_1T_3 \Leftrightarrow W_2T_3 \Leftrightarrow W_3T_3$.

定理 2.2 在 $LFTS(L^X,\delta)$ 中，$W_iT_3 \Rightarrow WT_2\ (i = 1,2,3)$.

证明 只要证 $W_1T_3 \Rightarrow WT_2$.

设 $x_\lambda, y_\mu \in M^*(L^X)$，$x \neq y$，由 WT_1 性，知 y_μ 是伪闭集 $\Rightarrow \text{supp}\, \overline{y_\mu} = \{y\}$，即 $x \notin \text{supp}\, \overline{y_\mu}$，又 $\overline{y_\mu}$ 是准分明闭集，由 W_1－正则性知有 $P \in \eta^-(x_\lambda)$，$Q \in \eta^-(\overline{y_\mu})$，使 $P \vee Q \supset [\lambda \vee p(\overline{y_\mu})]^* \supset (\lambda \vee \mu)^*$.

下证 $Q \in \eta^-(y_\mu)$.

若不然，有 $y_\mu \subset Q \Rightarrow \overline{y_\mu} \subset \overline{Q} = Q$，与 $\overline{y_\mu}(y) \nleqslant Q(y)$ 矛盾！

综上，有 $P \in \eta(x_\lambda)$，$Q \in \eta(y_\mu)$，使 $P \vee Q \supset (\lambda \vee \mu)^*$，故 (L^X,δ) 为 WT_2 空间.

定义 2.5 设 (L^X,δ) 是 $LFTS$，若对任两非零准分明闭集 A 和 B，当 $\text{supp}\, A \cap \text{supp}\, B = \varnothing$ 时，有 $P \in \eta(A)$，$Q \in \eta(B)$，使 $P \vee Q \supset (p(A) \vee p(B))^*$，则称 (L^X,δ) 是 W_1－正规空间，WT_1 的 W_1－正规空间称为 W_1T_4 空间.

定义 2.6 设 (L^X,δ) 是 $LFTS$，若对任两非零准分明伪闭集 A 和 B，当 $\text{supp}\, A \cap \text{supp}\, B = \varnothing$ 时，有 $P \in \eta(\overline{A})$ 和 $Q \in \eta(\overline{B})$，使 $P \vee Q \supset (p(A) \vee p(B))^*$，则称 (L^X,δ) 是 W_2－正规空间，WT_1 的 W_2－正规空间称为 W_2T_4 空间.

定义 2.7 设 (L^X,δ) 是 $LFTS$，若对任两个非零准分明伪闭集 A 和 B，当 $\text{supp}\, A \cap \text{supp}\, B = \varnothing$ 时，有 $P \in \eta(A)$ 和 $Q \in \eta(B)$，使 $P \vee Q \supset (p(A) \vee p(B))^*$，则称 (L^X,δ) 是 W_3－正规空间，WT_1 的 W_3－正规空间称为 W_3T_4 空间.

注 2.5 W_3－正规 $\Rightarrow W_2$－正规 $\Rightarrow W_1$－正规，
弱正规 $\Rightarrow W_2$－正规 $\Rightarrow W_1$－正规.

定理 2.3 若 (L^x,δ) 为满层的 $LFTS$，则 W_1－正规 $\Leftrightarrow W_2$－正规 $\Leftrightarrow W_3$－正规.

证明 只要证 W_1－正规 $\Rightarrow W_3$－正规.

设 A,B 为任两个非零准分明伪闭集，且 $\text{supp}\, A \cap \text{supp}\, B = \varnothing$，则由定理 2.1 的证明可知 $\overline{A \wedge p(A)^*}$，$\overline{B \wedge p(B)^*}$ 为准分明闭集，且 $p(\overline{A \wedge p(A)^*}) \geqslant p(A)$，$p(\overline{B \wedge p(B)^*}) \geqslant p(B)$，下证 $\text{supp}\, \overline{A \wedge p(A)^*} \cap \text{supp}\, \overline{B \wedge p(B)^*} = \varnothing$.

若有 $x \in \text{supp}\, \overline{A \wedge p(A)^*} \cap \text{supp}\, \overline{B \wedge p(B)^*}$，则 $\overline{A \wedge p(A)^*}(x) > 0$ 且 $\overline{B \wedge p(B)^*} > 0$.

于是有 $A(x) > 0$ 且 $B(x) > 0 \Rightarrow x \in \text{supp}\, A \cap \text{supp}\, B$，与 $\text{supp}\, A \cap \text{supp}\, B = \varnothing$ 矛盾！

由 W_1－正规性，知有 $P \in \eta^-(\overline{A \wedge p(A)^*})$，$Q \in \eta^-(\overline{B \wedge p(B)^*})$，使 $P \vee Q \supset [p(\overline{A \wedge p(A)^*}) \vee p(\overline{B \wedge p(B)^*})]^* \supset [p(A) \vee p(B)]^*$，又同定理 2.1 的证明可得 $P \in \eta^-(A)$，$Q \in \eta^-(B)$.

综上，即证得 (L^X,δ) 为 W_3－正规空间.

推论 2.2 在满层 $LFTS(L^X,\delta)$ 中，$W_1T_4 \Leftrightarrow W_2T_4 \Leftrightarrow W_3T_4$.

定理 2.4 在 $LFTS(L^X,\delta)$ 中，$W_iT_4 \Rightarrow W_iT_3\ (i = 1,2,3)$.

证明 只证 $W_1T_4 \Rightarrow W_1T_3$.

设 A 是准分明闭集，$x_\lambda \in M^*(L^X)$，$x \notin \text{supp}\, A$，则 $\overline{x_\lambda}$ 也是准分明闭集，且由 WT_1 性，知 $\text{supp}\, \overline{x_\lambda} \cap \text{supp}\, A = \{x\} \cap \text{supp}\, A = \varnothing$，故由 W_1－正规性，知有 $P \in \eta^-(\overline{x_\lambda})$，$Q \in \eta^-(A)$，使 $P \vee Q \supset [p(\overline{x_\lambda}) \vee p(A)]^* \supset [\lambda \vee p(A)]^*$.

又易证 $P \in \eta^-(x_\lambda)$. 若不然，$x_\lambda \subset P \Rightarrow \overline{x_\lambda} \subset \overline{P} = \overline{P} \Rightarrow \overline{x_\lambda}(x) \leqslant P(x)$ 与 $P \in \eta^-(\overline{x_\lambda})$ 矛盾！

故 (L^X,δ) 是 W_1T_3 空间.

3　W_iT_3 和 $W_iT_4(i=1,2,3)$ 在 Lowen 意义下的“好的推广”

定理 3.1　设$(L^X,\omega_L(\mathscr{T}))$是由分明拓扑空间$(X,\mathscr{T})$拓扑生成的 $LFTS$,则$(L^X,\omega_L(\mathscr{T}))$是 W_i - 正则空间$\Leftrightarrow(X,\mathscr{T})$是正则空间$(i=1,2,3)$.

证明　因$(L^X,\omega_L(\mathscr{T}))$是满层 $LFTS$,故只要证明$(L^X,\omega_L(\mathscr{T}))$是 W_1 - 正则空间$\Leftrightarrow(X,\mathscr{T})$是正则空间.

必要性　设$(L^X,\omega_L(\mathscr{T}))$是 W_1 - 正则空间,$E\in\mathscr{T}$,$E\neq\emptyset$,$x\notin E$,任取 $\lambda\in M(L)$,则 $\chi_E\wedge\lambda^*$ 是$(L^X,\omega_L(\mathscr{T}))$中的闭集且是非零准分明集,且 $x\notin\mathrm{supp}(\chi_E\wedge\lambda^*)=E$. 由 W_1 - 正则性,知有 $P\in\eta^-(x_\lambda)$,$Q\in\eta^-(\chi_E\wedge\lambda^*)$,使 $P\vee Q\supset[\lambda\vee p(\chi_E\wedge\lambda^*)]^*$　　$(*)$

令 $U=\{z\in X\mid P'(z)\not\leq\lambda'\}$,$V=\{z\in X\mid Q'(z)\not\leq\lambda'\}$,

由 $\omega_L(\mathscr{T})$ 的定义知 $U,V\in\mathscr{T}$,因 $P\in\eta^-(x_\lambda)$,故 $\lambda\not\leq P(x)$,即 $P'(x)\not\leq\lambda'\Rightarrow x\in U$,又因为 $Q\in\eta^-(\chi_E\wedge\lambda^*)$,所以对 $\forall y\in E$,$(\chi_E\wedge\lambda^*)(y)=\lambda>0$,从而 $\lambda\not\leq Q(y)$,即 $Q'(y)\not\leq\lambda'$,故 $y\in V\Rightarrow E\subset V$,即得 U、V 分别是 x 和 E 的开邻域,下证 $U\cap V=\emptyset$,事实上,若有 $z\in U\cap V$,则有 $P'(z)\not\leq\lambda'$,$Q'(z)\not\leq\lambda'$,即 $\lambda\not\leq P(z)$,$\lambda\not\leq Q(z)$,由 $\lambda\in M(L)$,$\lambda\not\leq(P\vee Q)(z)$ 与$(*)$矛盾.即证得$(X,\mathscr{T})$是正则空间.

充分性　设$(X,\mathscr{T})$是正则空间,A 是 X 上的准分明闭集,$x_\lambda\in M^*(L)$,且 $x\notin\mathrm{supp}\,A$. 令 $E=\{y\in X\mid A(y)\geq p(A)\}$,则 $E\in\mathscr{T}$,且 $x\notin E$,由$(X,\mathscr{T})$正则,有 $U,V\in\mathscr{T}$,使 $U\cap V=\emptyset$. 令 $P=\chi_{U'}$,$Q=\chi_{V'}$,则 $P\in\eta^-(x_\lambda)$,$Q\in\eta^-(A)$,且 $P\vee Q=\chi_{U'}\vee\chi_{V'}=1^*\geq(\lambda\vee p(A))^*$,即证得$(L^X,\omega_L(\mathscr{T}))$是 W_1 - 正则空间.

推论 3.1　设(L^X,δ)是可拓扑生成的 $LFTS$,则(L^X,δ)是 W_i - 正则空间$\Leftrightarrow(L^X,\delta)$是弱正则空间$(i=1,2,3)$.

定理 3.2　设$(L^X,\omega_L(\mathscr{T}))$是由分明拓扑空间$(X,\mathscr{T})$拓扑生成的 $LFTS$,则$(L^X,\omega_L(\mathscr{T}))$是 W_i - 正规空间$\Leftrightarrow(X,\mathscr{T})$是正规空间$(i=1,2,3)$.

证明　由于$(L^X,\omega_L(\mathscr{T}))$是满层 $LFTS$,故只要证明:$(L^X,\omega_L(\mathscr{T}))$是 W_1 - 正规空间$\Leftrightarrow(X,\mathscr{T})$是正规空间. 证明方法类似于定理 3.1,仿证之即可.

推论 3.2　设(L^X,δ)是可拓扑生成的 $LFTS$,则(L^X,δ)是 W_i - 正规空间$\Leftrightarrow(L^X,\delta)$是弱正规空间$(i=1,2,3)$.

[参考文献]

[1] Fang Jinxuan, Ren Bailin. A set of new separation axioms in L-fuzzy topological spaces[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 96:359-366.

[2] 王国俊. L-模糊拓扑空间论[M]. 西安:陕西师大出版社,1988.

[3] 方锦暄,任百林. L-模糊拓扑空间的弱分离公理[J]. 南京师大学报:自然科学版,1994,17(4):1-8.

[4] 王国俊. 拓扑分子格的分离公理[J]. 数学研究与评论,1983,3(2):9-16.

[5] Sinha S P. Separation axioms in fuzzy topological spaces[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992,45:261-270.

[6] Pu P M, Liu Y M. Fuzzy topology I:Neighborhood structure of a fuzzy point and Moore-Smith convergence[J]. J Math Anal Appl, 1980,76:571-599.

[责任编辑:陆炳新]