

# 在横场中 $(1/2, 1)$ 混合自旋各向异性 XY 模型的量子纠缠

翟孝月

(南京师范大学物理科学与技术学院, 江苏 南京 210097)

**[摘要]** 通过引入 negativity 的概念, 研究了 $(1/2, 1)$ 混合自旋各向异性 XY 模型的量子纠缠, 得到了两个自旋在外场中的有限温度时的量子纠缠的数值结果. 发现该系统存在一个临界温度  $T_c$ , 当温度大于  $T_c$  时, 量子纠缠消失.

**[关键词]** 量子纠缠, negativity, 混合自旋, 各向异性, XY 模型, 横场, 临界温度

**[中图分类号]** O469 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1001-4616(2006)04-0032-04

## Entanglement of $(1/2, 1)$ Mixed-Spin Anisotropic XY Model in a Transverse Field

Zhai Xiaoyue

(School of Physical Science and Technology, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

**Abstract:** By using the concept of negativity, we investigate entanglement of  $(1/2, 1)$  mixed-spin anisotropic XY model and obtain the numerical results of entanglement of two spins in a transverse field at finite temperature. We find that there exists a critical temperature  $T_c$ , after which the entanglement vanishes.

**Key words:** entanglement, negativity, mixed-spin, anisotropic, XY model, transverse field, critical temperature

## 0 引言

量子纠缠是量子力学领域中非常重要的课题, 它在量子信息、量子密码术、量子计算机等方面有着广泛的应用. 由于它潜在的应用价值和重大的科学意义, 正引起各方面越来越多的关注<sup>[1-13]</sup>. 各向异性 XY 模型, 已经得到了广泛深入的研究<sup>[14-16]</sup>, 但仅仅局限在自旋为  $1/2$  的系统, 对于自旋为  $1/2$  的系统, 存在一种有效准确的计算方法即借助 concurrence 的概念, 所以自旋为  $1/2$  的系统已经得到比较全面的研究. 但对于自旋为  $1$  的系统, 却没有得到很好的研究. Peres-Horodecki 等人定性地给出了判断一个态是否是纠缠态的标准<sup>[17,18]</sup>, Vidal 和 Werner 又进行了定量地推广<sup>[19]</sup>, 他们给出了计算量子纠缠的另一种方法即采用 negativity 来度量纠缠. 利用这种方法,  $(1/2, 1)$ 混合自旋海森堡模型得到了很好的研究. 同样地, 我们把这种方法运用到在横场中的 $(1/2, 1)$ 混合自旋各向异性 XY 模型中, 研究了温度、外场和两自旋间相互作用对纠缠的影响, 发现同 $(1/2, 1)$ 混合自旋海森堡模型、自旋为  $1/2$  的各向同性海森堡模型<sup>[7]</sup>、自旋为  $1/2$  的两自旋各向异性海森堡 XY 链<sup>[9]</sup>类似,  $(1/2, 1)$ 混合自旋各向异性 XY 模型也存在临界温度  $T_c$ , 当温度大于  $T_c$  时, 不存在量子纠缠.

## 1 计算方法

本文中, 我们研究在横场中的 $(1/2, 1)$ 混合自旋各向异性 XY 模型的两个自旋间的量子纠缠, 其哈密

收稿日期: 2006-07-01.

基金项目: 教育部“优秀青年教师资助计划项目”.

作者简介: 翟孝月, 女, 1981—, 硕士研究生, 主要从事凝聚态物理量子纠缠的学习与研究. E-mail: zhuyue81@sina.com.cn

顿量为:

$$H = -\lambda[(1+\gamma)S_1^x S_2^x + (1-\gamma)S_1^y S_2^y] - (S_1^z + S_2^z),$$

式中  $\lambda$  代表两自旋间的相互作用,  $\gamma$  是各向异性参数,  $S_1$  和  $S_2$  分别代表自旋为 1/2 和自旋为 1 的算符. 为了得到哈密顿量的矩阵表示, 我们选择下面一组基:

$$|-\frac{1}{2}, -1\rangle, |\frac{1}{2}, 0\rangle, |-\frac{1}{2}, 1\rangle, |\frac{1}{2}, -1\rangle, |-\frac{1}{2}, 0\rangle, |\frac{1}{2}, 1\rangle,$$

式中  $|m, M\rangle$  分别是  $S_1^z$  和  $S_2^z$  的本征值  $m$  和  $M$  对应的本征态. 在这一组基下, 系统的哈密顿量可写为一个块对角矩阵:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\gamma\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\gamma\lambda & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\gamma\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\gamma\lambda & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

在热平衡条件下, 系统的态密度为:

$$\rho(T) = \frac{\exp(-\frac{H}{k_B T})}{Z},$$

$$Z = \text{tr}(\exp(-\frac{H}{k_B T})),$$

式中  $k_B$  是玻尔兹曼常数, 在本文中, 我们取  $k_B = 1$ . 所以态密度矩阵为:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} & \rho_{15} & \rho_{16} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} & \rho_{25} & \rho_{26} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} & \rho_{35} & \rho_{36} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} & \rho_{45} & \rho_{46} \\ \rho_{51} & \rho_{52} & \rho_{53} & \rho_{54} & \rho_{55} & \rho_{56} \\ \rho_{61} & \rho_{62} & \rho_{63} & \rho_{64} & \rho_{65} & \rho_{66} \end{pmatrix}.$$

对第一个自旋为 1/2 的子系统进行部分转置, 我们得到:

$$\rho^{T_1} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{45} & \rho_{13} & \rho_{41} & \rho_{15} & \rho_{43} \\ \rho_{34} & \rho_{22} & \rho_{56} & \rho_{24} & \rho_{52} & \rho_{26} \\ \rho_{31} & \rho_{65} & \rho_{33} & \rho_{61} & \rho_{35} & \rho_{63} \\ \rho_{14} & \rho_{42} & \rho_{16} & \rho_{44} & \rho_{12} & \rho_{46} \\ \rho_{51} & \rho_{25} & \rho_{53} & \rho_{21} & \rho_{55} & \rho_{23} \\ \rho_{34} & \rho_{62} & \rho_{36} & \rho_{64} & \rho_{32} & \rho_{66} \end{pmatrix}.$$

态密度  $\rho$  的 negativity 定义为:

$$\mathcal{N}(\rho) = \sum_i |\mu_i|,$$

式中  $\mu_i$  是  $\rho^{T_1}$  的负的本征值.

2 计算结果

利用上述方法,我们研究了在横场中的 $(1/2,1)$ 混合自旋各向异性 XY 模型,得到了 negativity  $\mathcal{N}$  随温度  $T$  和两自旋间相互作用  $\lambda$  的变化示意图,见图 1. 图 1 中(a)、(b)、(c) 分别对应于各向异性参数  $\gamma = 0.2, 0.5, 0.9$  的情形,从图中我们可以清楚地看到对于较大的  $\lambda$ , negativity  $\mathcal{N}$  等于零. 为了更清楚地看到 negativity  $\mathcal{N}$  所发生的变化,我们在图 2 中分别给出了  $\lambda = 0.1, \lambda = 0.8, \lambda = 2.0$  ( $\gamma = 0.2$ ) 时 negativity  $\mathcal{N}$  随温度  $T$  的变化图. 从图 2(a) 中我们可以清楚地看到,当  $\lambda = 0.1$  时, negativity  $\mathcal{N}$  起初最大并等于一个常数  $\mathcal{N} = 0.00708$ ,但随着  $T$  的增加,  $\mathcal{N}$  迅速减小,当温度达到或大于临界温度  $T_c = 0.201$  时,  $\mathcal{N} = 0$ , 纠缠消失. 当  $\lambda = 0.8$  时,见图 2(b), negativity  $\mathcal{N}$  起初也是最大并等于一个常数  $\mathcal{N} = 0.061$ ,随着  $T$  的增加,  $\mathcal{N}$  迅速减小,但却没有消失,温度再增加时,  $\mathcal{N}$  慢慢增大又逐渐减小,当温度达到或大于临界温度  $T_c = 0.524$  时,  $\mathcal{N} = 0$ , 纠缠消失. 当  $\lambda$  比较大时,见图 2(c), 我们可以看到情况与  $\lambda = 0.1$  时类似,随着温度增加,  $\mathcal{N}$  先保持不变,  $\mathcal{N} = 0.49999$ , 然后再减小到零,  $T_c = 1.32$ . 图 3 中我们给出了  $\mathcal{N}$  在  $T - \lambda$  面上的投影图,从图中我们可以清楚地看出  $\mathcal{N}$  大于零和等于零的区域,同时也比较容易地找出对于不同  $\lambda$  时的临界温度  $T_c$ .

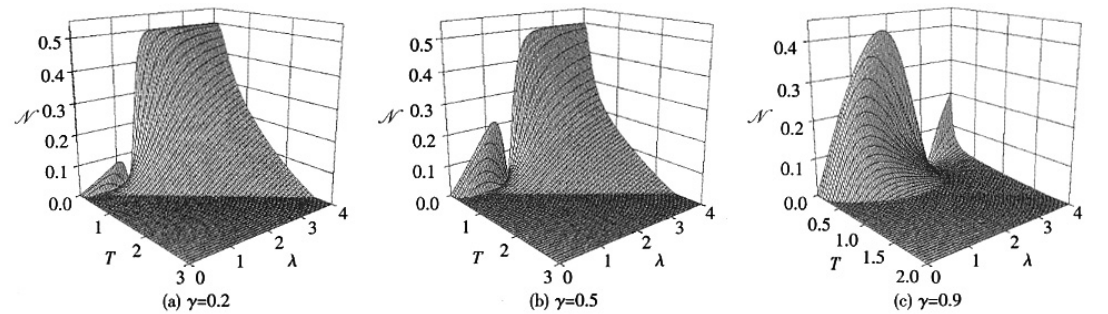


图 1  $\mathcal{N}$  同时随温度  $T$  和两自旋间相互作用  $\lambda$  的变化示意图

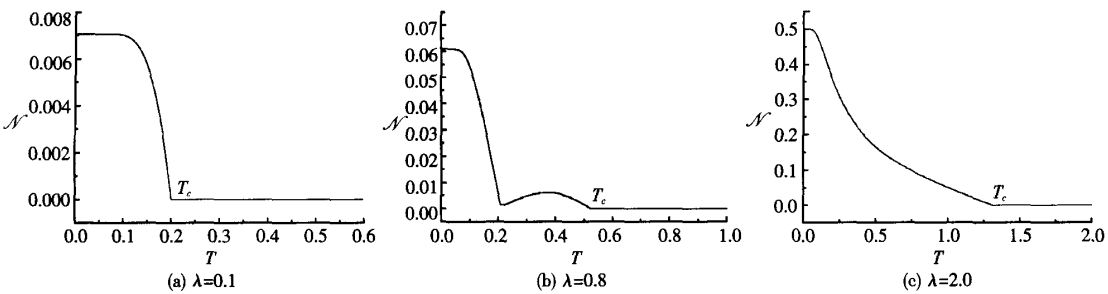


图 2  $\mathcal{N}$  随温度  $T$  的变化示意图 ( $\gamma=0.2$ )

本文我们引入了 negativity  $\mathcal{N}$  的概念,对 $(1/2,1)$ 混合自旋各向异性 XY 模型的量子纠缠进行了研究,数值地得到了两个自旋在外场中的有限温度时的量子纠缠. 发现同 $(1/2,1)$ 混合自旋海森堡模型类似,也存在着一个临界温度  $T_c$ ,当温度大于  $T_c$  时,纠缠消失.

致谢 感谢导师童培庆教授的悉心指导!

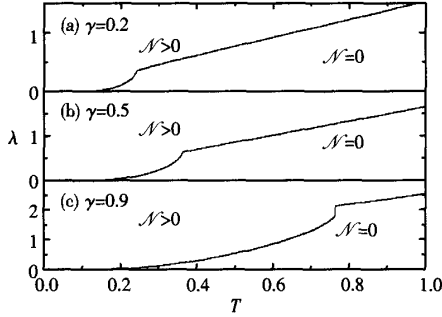


图 3  $\mathcal{N}$  在温度  $T$  和两自旋间相互作用  $\lambda$  面上的投影示意图

[参考文献]

- [1] Ekert A K. Quantum cryptography based on Bell's theorem[J]. Phys Rev Lett,1991,67(6): 661-663.
- [2] Bennett C H, Brassard G, Crépeau C, et al. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels[J]. Phys Rev Lett,1993,70(13):1 895-1 899.
- [3] Osborne T J, Nielsen M A. Entanglement in a simple quantum phase transition[J]. Phys Rev A,2002,66(3): 032110-1-032110-14.
- [4] Vidal G, Latorre J I, Rico E, et al. Entanglement in quantum critical phenomena[J]. Phys Rev Lett,2003,90(22): 227902-1-227902-4.
- [5] Gu S J, Lin H Q, Li Y Q. Entanglement, quantum phase transition, and scaling in the XXZ chain[J]. Phys Rev A,2003,68(4): 042330-1-042330-4.
- [6] Wang X G. Entanglement in the quantum Heisenberg XY model[J]. Phys Rev A,2001,64(1): 012313-1-012313-7.
- [7] Arnesen M C, Bose S, Vedral V. Natural thermal and magnetic entanglement in the 1D Heisenberg model[J]. Phys Rev Lett,2001,87(1): 017901-1-017901-4.
- [8] Gunlycke D, Kendon V M, Vedral V, et al. Thermal concurrence mixing in a one-dimensional Ising model[J]. Phys Rev A,2001,64(4): 042302-1-042302-7.
- [9] Lagmago Kamta G, Anthony F Starace. Anisotropy and magnetic field effects on the entanglement of a two qubit Heisenberg XY Chain[J]. Phys Rev Lett,2002,88(10): 107901-1-107901-4.
- [10] Verstraete F, Popp M, Cirac J I. Entanglement versus correlations in spin systems[J]. Phys Rev Lett,2004,92(2): 027901-1-027901-4.
- [11] Verstraete F, Martin-Delgado M A, Cirac J I. Diverging entanglement length in gapped quantum spin systems[J]. Phys Rev Lett,2004,92(8): 087201-1-087201-4.
- [12] Lambert N, Emary C, Brandes T. Entanglement and the phase transition in single-mode superradiance[J]. Phys Rev Lett,2004,92(7): 073602-1-073602-4.
- [13] Gu S J, Deng S S, Li Y Q, et al. Entanglement and quantum phase transition in the extended Hubbard model[J]. Phys Rev Lett,2004,93(8): 086402-1-086402-4.
- [14] Tong P Q, Zhong M. Quantum phase transitions of periodic anisotropic XY chain in a transverse field[J]. Physica B,2001,304: 91-106.
- [15] Tong P Q, Zhong M. Quantum phase transitions of a quasiperiodic anisotropic XY chain in a transverse magnetic field[J]. Phys Rev B,2002,65(6):064421-1-064421-5.
- [16] Zhang L F, Tong P Q. Entanglement of periodic anisotropic XY chains[J]. J Phys A: Math Gen,2005,38:1-12.
- [17] Peres A. Separability criterion for density matrices[J]. Phys Rev Lett,1996,77(8): 1 413-1 415.
- [18] Horodecki M, Horodecki P, Horodecki R. Separability of mixed states; necessary and sufficient conditions[J]. Phys Lett A,1996,223:1-8.
- [19] Vidal G, Werner R F. Computable measure of entanglement[J]. Phys Rev A,2002,65(3): 032314-1-032314-11.

[责任编辑:丁 蓉]