

# Non-Ohm ic 谱反常扩散粒子的响应特性: 耦合谐振子势情况

黄 霞<sup>1</sup>, 张 航<sup>2</sup>

( 1 华北电力大学数理系, 北京 102206)

( 2 南京师范大学物理科学与技术学院, 江苏 南京 210097)

**[摘要]** 研究了具有 non-Ohm ic 谱的反常扩散粒子对谐振子势的响应特性. 结果发现对次扩散粒子, 系统需要更长的时间达到平衡, 而对超扩散粒子, 则只要更短的时间就可平衡; 特别对超扩散粒子, 系统对各种参数值的变化更加敏感, 而对次扩散则相对迟钝些. 本文提供的分析方法对研究系统在其他外势条件下的响应特性问题将有一定的启发作用.

**[关键词]** 反常扩散, 广义 Langevin 方程, non-Ohm ic 谱

**[中图分类号]** O 414 21 **[文献标识码]** A **[文章编号]** 1001-4616( 2007) 01-0044-05

## Response Characteristics of Anomalous Diffusing Particles With Non-Ohm ic Spectrum: the Harmonic Potential Case

Huang Xia<sup>1</sup>, Zhang Hang<sup>2</sup>

( 1. Department of Mathematics and Physics, North China Electric Power University, Beijing 102206, China)

( 2. School of Physical Science and Technology, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

**Abstract** The response characteristics of a diffusing particle with non-Ohm ic spectrum under a harmonic potential are investigated, and it is found that the system takes more time to attain a balance for subdiffusion, and less time for superdiffusion. Particularly, a system of superdiffusion is more sensitive to the changes of different parameters, while for a subdiffusion system, it is more obtuse. The method used in this paper is useful for the study of characteristics of the diffusing particles under other external conditions.

**Key words** anomalous diffusion, generalized Langevin equation, non-Ohm ic spectrum

## 0 引言

自上世纪 70 年代, 反常扩散现象引起了科学家的广泛注意. 在诸如湍流、等离子体、渗透媒介、生长表面和细胞结构等环境中的系统表现出偏离 Brown 运动代表的扩散特征, 即位移均方差  $\langle (x - x_0)^2 \rangle \sim t^\alpha$  ( $\alpha \neq 1$ ), 我们称这种现象为反常扩散. 如果标度  $\alpha > 1$  我们说系统作超扩散 (superdiffusion) 运动; 而  $\alpha < 1$  系统在作次扩散 (subdiffusion). 还有一类更加反常的扩散, 扩散的粒子没有一个能很好定义的位移均方差, 比如 Lévy 型扩散, Lévy 粒子的位移均方是发散的, 表现超扩散性质. 反常扩散问题是统计物理近平衡涨落部分的新分支.

为了解释和描述反常扩散现象, 人们提出了很多模型和理论. 其中有著名的分数 Brown 运动 (fractional Brown motion (FBM)), 连续时间随机行走方法 (continue time random walk (CTRW))<sup>[1, 2]</sup>, 非线性 Fokker-Planck 方程<sup>[3-7]</sup>、广义 Langevin 方程的 non-Ohm ic 谱分析<sup>[8-11]</sup> 等. 这些理论都能够得到反常扩散的一些结果, 但并没有深入地涉及动力学层次, 所以现在仍不能把握哪一种方法是根本性的方法.

对一个运动的系统, 它的响应函数反映了基本的动力学内容, 换句话说, 如果知道了一个系统的响应

收稿日期: 2006-02-22 修回日期: 2006-05-08

基金项目: 华北电力大学青年教师科研基金资助项目.

作者简介: 黄 霞 (1977—), 女, 讲师, 主要从事统计物理的教学与研究. E-mail: xhuang@ncepu.edu.cn

函数,那么我们能够很容易地得到系统的有关位移以及速度等基本运动学状态参量的行为,如果系统受到随机作用力,那么我们就得到位移或者速度的各种关联函数.在数学上,系统的响应函数实际上就是系统运动微分方程的格林函数.由于响应函数能够包含系统运动的暂态行为,因此它一直是一个各种条件下系统运动学研究的重点.本文的任务是得到一个由广义 Langevin 方程的 non-Ohmic 谱理论支配的反常随机系统的响应特性. non-Ohmic 谱模型可以描述许多物理现象,诸如一些玻璃状胶体颗粒组成的老化 (aging) 介质里的扩散问题<sup>[12-13]</sup>、重核融合问题<sup>[14]</sup>.

## 1 模型

一个在稳定媒介中作扩散运动的粒子常常被广义 Langevin 方程描述为<sup>[8-15]</sup>,

$$\ddot{x} + V'(x) + \int_0^t \beta(t-t')x(t')dt' = f(t), \quad (1)$$

这里  $f(t)$  是零均值热浴噪声,并且关联函数  $c(\tau)$  是

$$\langle f(t) \rangle_s = 0 \quad \langle f(t)f(t') \rangle_s = c(|t-t'|) = c(\tau). \quad (2)$$

耗散核函数  $\beta(t)$  写为

$$\beta(t-t') = \int d\omega \kappa(\omega) \rho(\omega) \cos \omega(t-t'), \quad (3)$$

这里  $\kappa(\omega)$  是噪声谱,而  $\rho(\omega)$  是热浴谐振子的振动模密度.

对方程 (1) 中的势函数  $V(x)$ , 我们考虑一个正谐振子势  $V(x) = V(x_0) + \frac{1}{2}\omega_0^2(x-x_0)^2$ , 这里  $\omega_0^2$  表示势函数  $V(x)$  在  $x = x_0$  的二阶导数. 运用 Laplace 变换, 可得到广义 Langevin 方程 (1) 的形式解:

$$x(t) = \langle x(t) \rangle_s + \int_0^t M_0(t-\tau)f(\tau)d\tau \quad (4)$$

这里

$$\langle x(t) \rangle_s = v(0)M_0(t) + x(0)X(t), \quad (5)$$

$$X(t) = 1 - \omega_0^2 \int_0^t M_0(\tau)d\tau \quad (6)$$

注意  $x(0)$  和  $v(0)$  ( $= \dot{x}(0)$ ) 分别是粒子的坐标和速度的初始量平均值; 响应函数  $M_0(t)$  是函数

$$M_0(s) = \frac{1}{s^2 + s\beta(s) + \omega_0^2} \quad (7)$$

的逆 Laplace 变换, 这里

$$\beta(s) = \int_0^\infty \beta(t)e^{-st}dt \quad (8)$$

是耗散核  $\beta(t)$  的 Laplace 变换. 角标 0 表示对应的动力学量是在  $x = x_0$  附近的计算值.

所谓 non-Ohmic 谱模型<sup>[16]</sup>, 就是根据反常扩散的谱密度定义, 直接假设噪声谱具有一个自仿射的特征, 即  $\kappa(\omega) \sim \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{\delta-1}$ , 这里  $\omega_c$  是一个量纲系数. 这个 non-Ohmic 模型能够导致一个反常扩散结果, 即  $0 < \delta < 1$  对应次扩散, 而  $1 < \delta < 2$  对应超扩散. 我们把热浴视作一个连续介质的声子模型, 所以经常选择 Debye 频谱作为热浴谱密度, 即  $\rho(\omega) = \frac{\omega_c^2}{\omega^2 + \omega_c^2}$ , 这里  $\omega_c$  是截断频率. 于是阻尼核函数  $\beta(t)$  为

$$\beta(t) = \int d\omega \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{\delta-1} \frac{\omega_c^2}{\omega^2 + \omega_c^2} \cos \omega t \quad (9)$$

## 2 正谐振子势下系统的响应函数

我们考虑一个具有 non-Ohmic 谱的扩散粒子在如前所述的正谐振子势  $V(x) = V(x_0) + \frac{1}{2}\omega_0^2(x-x_0)^2$  影响下的响应特性. 系统的动力学按照 (1) 式演化. 为了求出系统的响应函数  $M_0(t)$ , 我们首先要给出阻尼核函数  $\beta(t)$

$$\beta(t)=\int\limits_{\gamma}\mathrm{d}\omega\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{\delta-1}\frac{\omega_c^2}{\omega^2+\omega_c^2}\cos\omega t\tag{10}$$

的 Laplace 变换  $\beta(s)$

$$\beta(s)=\int\limits_{\gamma}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{\delta-1}\frac{\omega_c^2}{\omega^2+\omega_c^2}\mathrm{d}\omega\int\limits_0^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\cos\omega t\mathrm{d}t\tag{11}$$

即

$$\beta(s)=\int\limits_{\gamma}\frac{s}{s^2+\omega^2}\frac{\omega_c^2}{\omega^2+\omega_c^2}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{\delta-1}\mathrm{d}\omega\tag{12}$$

经过复变函数的围道积分, 容易得到

$$\beta(s)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\omega_c}\right)^{\delta-1}s\omega_c^2\frac{s^{\delta-2}-\omega_c^{\delta-2}}{\omega_c^2-s^2}\frac{1}{\sin(\frac{1}{2}\delta)}.\tag{13}$$

按照 (7), 我们有

$$M_0(s)=\frac{s^2-\omega_c^2}{s^4+Bs^2-A s^{\delta}-\omega_0^2\omega_c^2}\tag{14}$$

这里

$$A=\frac{\pi}{2}\frac{\omega_c^2}{\sin(\frac{\pi}{2}\delta)}\left(\frac{1}{\omega_c}\right)^{\delta-1},\tag{15}$$

$$B=\omega_0^2-\omega_c^2+A\omega_c^{\delta-2}.\tag{16}$$

响应函数是式 (14) 的逆 Laplace 变换

$$M_0(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(s^2-\omega_c^2)\mathrm{e}^{st}}{s^4+Bs^2-A s^{\delta}-\omega_0^2\omega_c^2}\mathrm{d}s\tag{17}$$

我们可以由上式直接给出响应函数  $M_0(t)$  以 Mittag-Leffler 函数的导数为形式的表达<sup>[17]</sup>

$$\begin{aligned} M_0(t)=&\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{1}{m!}(-B)^m\sum_{k=0}^m\binom{m}{k}\left(\frac{\omega_0^2\omega_c^2}{B}\right)^k\times t^{2m+2k+1}E_{4-\delta,2+(\delta-2)m+2k}^{(m)}(-At^{4-\delta})\right] \\ &-\left[\frac{\omega_c^2}{m!}(\omega_0^2\omega_c^2)^m\sum_{k=0}^m\binom{m}{k}\left(\frac{A}{\omega_0^2\omega_c^2}\right)^k\times t^{4m-\delta k+3}E_{2,4+2m-\delta k}^{(m)}(-Bt^2)\right], \end{aligned}\tag{18}$$

这里  $E_{\alpha,\beta}(z)$  是广义 Mittag-Leffler 函数, 它被定义为

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\tag{19}$$

并且

$$E_{\lambda,\mu}^{(k)}(y)\equiv\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}y^k}E_{\lambda,\mu}(y)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(j+k)!}{j!}\frac{y^j}{\Gamma(\lambda j+\lambda k+\mu)}.\tag{20}$$

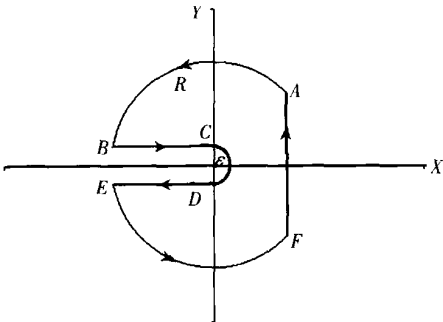


图 1 用作计算的积分围道

Fig.1 The integration contour for calculating

我们也可以利用留数定理来计算  $M_0(t)$  (式 (17)), 围道积分路线如图 1,  $\varepsilon$  和  $R$  分别为小圆和大圆半

径. 我们考虑

$$\int_{ABDEF} \frac{(s^2 - \omega_c^2) e^{st}}{s^4 + B s^2 - A s^\delta - \omega_0^2 \omega_c^2} ds \quad (R \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0), \tag{21}$$

因此, 我们有

$$(i) \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{ABDEF} \rightarrow 0 \tag{22}$$

$$(ii) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{AB} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\pi} \frac{(\varepsilon^2 e^{20i} - \omega_c^2) e^{(\varepsilon e^{i\theta})t}}{\varepsilon^4 e^{40i} + B \varepsilon^2 e^{20i} - A \varepsilon^\delta e^{i\theta} - \omega_0^2 \omega_c^2} \times i e^{i\theta} d\theta \tag{23}$$

$$(iii) \lim_{R \rightarrow \infty} (\int_{BD} + \int_{DE}) = \int_0^\infty \frac{2A e^{-r^\delta} \sin[\pi \delta] (r^2 - \omega_c^2)}{A^2 r^{2\delta} - 2A r^\delta \cos[\pi \delta] (r^4 + B r^2 - \omega_0^2 \omega_c^2) + (r^4 + B r^2 - \omega_0^2 \omega_c^2)^2} dr = I \tag{24}$$

这里,  $r, \theta$  分别为复平面上任意一点的极坐标. 对于残数需要解方程

$$s^4 + B s^2 - A s^\delta - \omega_0^2 \omega_c^2 = 0 \tag{25}$$

利用计算机可求其数值解, 最终得到残数值  $\text{Res}(a_k)$ . 因此,  $M_0(t) = \frac{1}{2\pi i} (2\pi R - I) \approx R$ .

图 2 显示了 non-Ohmic 谱反常粒子在谐振子势下响应函数  $M_0(t)$  与时间的关系, 曲线 1、2、3 分别代表  $\delta = 1.4, \delta = 1, \delta = 0.5$  的粒子, 其中参数  $\omega_c = 1$  而对  $\omega_0$  和  $\omega_c$  的取值分别为  $a(0.5, 1); b(1, 1); c(2, 1)$ . 我们发现对次扩散粒子, 即  $0 < \delta < 1$  系统需要更长的时间达到平衡, 而对超扩散粒子, 则只要更短的时间就可平衡; 我们也看到如果势能圆频率  $\omega_0$  影响越大, 则响应函数振动越明显; 特别对超扩散粒子, 系统对势能圆频率以及 Debye 频率值的变化更加敏感, 而对次扩散则相对迟钝些.

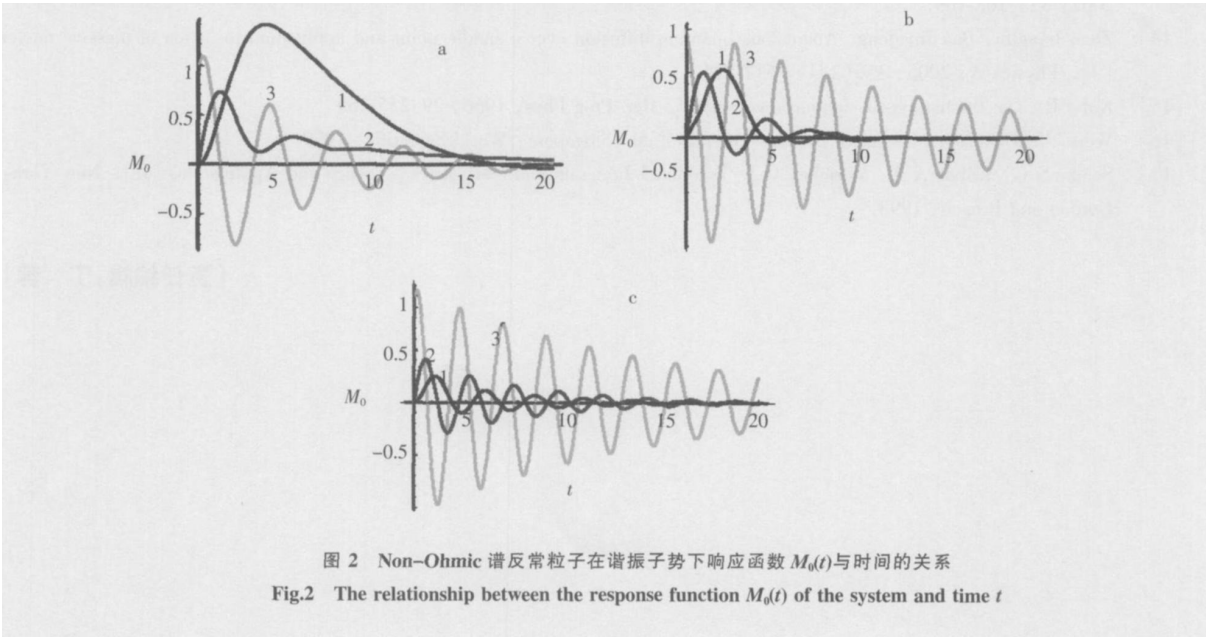


图 2 Non-Ohmic 谱反常粒子在谐振子势下响应函数  $M_0(t)$  与时间的关系  
Fig.2 The relationship between the response function  $M_0(t)$  of the system and time  $t$

3 结论

扩散系统的响应特性是研究系统扩散问题的核心物理量, 因为响应函数是得到系统各种矩或者关联函数的关键量. 本文应用广义 Langevin 方程对 non-Ohmic 谱介质中的系统在正谐振子势下的响应特性进行了分析, 结果发现对次扩散粒子, 系统需要更长的时间达到平衡, 而对超扩散粒子, 则只要更短的时间就可平衡; 特别对超扩散粒子, 系统对各种参数值的变化更加敏感, 而对次扩散则相对迟钝些. 在穿越势垒的扩散问题中, 粒子通过势垒顶部的通过几率就直接与粒子的暂态运动特性有关, 而一般的理论并没有考虑具有反常的 non-Ohmic 谱阻尼函数和噪声函数的情况, 因此本文提供的分析方法将对研究反常扩散系统的逃逸问题有一定的启发作用.

[参考文献]

- [1] Klafter J, Blumen A, Shlesinger M F. Stochastic pathway to anomalous diffusion[J]. Phys Rev A, 1987, 35: 3 081-3 085
- [2] Zumofen G, Blumen A, Klafter J. Current flow under anomalous-diffusion conditions: Lévy walks[J]. Phys Rev A, 1990 41: 4 558-4 561.
- [3] Tsallis C, Bukman D J. Anomalous diffusion in the presence of external forces: Exact time-dependent solutions and their thermodynamical basis[J]. Phys Rev E, 1996, 54: R2197-R2220
- [4] Compte A, Jou D. Non-equilibrium thermodynamics and anomalous diffusion[J]. J Phys A, 1996, 29(15): 4 321-4 327.
- [5] Compte A, Jou D, Katayama Y. Anomalous diffusion in linear shear flows[J]. J Phys A, 1997, 30(4): 1 023-1 029.
- [6] Borland L. Microscopic dynamics of the non-linear Fokker-Planck equation: A phenomenological model[J]. Phys Rev E, 1998, 57: 6 634-6 642.
- [7] Rigo A, Plastino A R, Casas M, et al. Anomalous diffusion coupled with Verhulst-like growth dynamics: Exact time-dependent solutions[J]. Phys Lett A, 2000, 276: 97-102.
- [8] Kubo R, Toda M, Hashitsume N. Statistical Physics II: Solid State Sciences[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1976.
- [9] Muralidhar R, Ramkrishna D, Nakanishi H, et al. Anomalous diffusion: A dynamic perspective[J]. Physica A, 1990, 167(2): 539-546.
- [10] Wang K G, Dong L K, Wu X F, et al. Correlation effects: generalized Brownian motion and anomalous diffusion[J]. Physica A, 1994, 203(1): 53-61.
- [11] Wang K G, Tokuyama M. Nonequilibrium statistical description of anomalous diffusion[J]. Physica A, 1999, 265(3): 341-350.
- [12] Abou R, Bonn D, Meunier J. Aging dynamics in a colloidal glass[J]. Phys Rev E, 2001, 64: 021510-1-021510-6.
- [13] Bellon L, Ciliberto S. Experimental study of the fluctuation-dissipation relation during an aging process[J]. Physica D, 2002, 168: 168-169.
- [14] Zhao Jianglin, Bao Jingdong. Anomalous quantum diffusion over a saddle point and application to fusion of massive nuclei[J]. Physica A, 2005, 356(2/4): 517-524.
- [15] Kubo R. The fluctuation-dissipation theorem[J]. Rep Prog Phys, 1966, 29: 255-269.
- [16] Weiss U. Quantum Dissipative Systems[M]. 2nd ed. Singapore: World Scientific, 1999.
- [17] Samko S G, Kilbas A A, Marichev O I. Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications[M]. New York: Gordon and Breach, 1993.

[责任编辑: 丁 蓉]