关于 Planar Ferromagnets and Antiferromagnets 泛函的径向极小元的注记

齐龙兴, 雷雨田

(南京师范大学数学与计算机科学学院数学研究所, 江苏 南京 210097)

[摘要] 就 Bethuel, Brezis和 Helein提出的问题讨论了 Planar Ferromagnets and Antiferromagnets泛函在 $H = \{u(x) = (\sin f(r)\frac{x}{|x|}, \cos f(r)) \in H^1(B_1, S^2); f(0) = 0, f(1) = \frac{\pi}{2}, r = |x|\}$ 中的径向极小元的一些性质, 其中包括此泛函的径向极小元的零点的分布及若干个上界估计, 并给出了这一问题的肯定回答.

[关键词] Planar Ferromagnets and Antiferromagnets泛函, 径向极小元, 一致估计

[中图分类号] O175.2 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2007)03-0015-06

On the Remark for the Radial Minimizer of Planar Ferromagnets and Antiferromagnets Functional

Qi Longxing, Lei Yutian

(Institute of Mathematics, School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

Abstract For the radial minimizer of the Planar Ferromagnets and Antiferromagnets functional in $H = \{u(x) = (\sin f(r)\frac{x}{|x|}, \cos f(r)) \in H^1(B_1, S^2); f(0) = 0, f(1) = \frac{\pi}{2}, r = |x|\}$, including distribution of zero and some upper estimation. The author studied partly an open problem which was introduced by Bethuel, Brezis and Helein.

Key words Planar Ferromagnets and Antiferromagnets functional, radial minimizer, uniform estimate

0 引言

记 B_r 为 R^2 中以原点为心, r为半径的圆, $S^1 = \{x: x \in R^3, x^3 = 0, (x^1)^2 + (x^2)^2 = 1\}$, $S^2 = \{x: x \in R^3, (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1\}$, $g: \partial B_1 \to S^1 \subset R^3$ 为光滑函数且满足 $\deg(g, \partial B_1) = d \neq 0$ 关于泛函

$$E_\varepsilon(u, B_1) = \frac{1}{2}\int_{B_1} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_{B_1}(u^3)^2 dx \tag{1}$$

于 $H_g^1(B_1, S^2) = \{v \in H^1(B_1, S^2); v|_{\partial B_1} = g\}$ 中极小元当 $\varepsilon \to 0$时的渐近性质, 已有较系统的研究[1-3]. 该研究表明: 这一极小元是存在的. 本文考虑此泛函在 $H = \{u(x) = (\sin f(r)\frac{x}{|x|}, \cos f(r)) \in H^1(B_1, S^2); f(0) = 0, f(1) = \frac{\pi}{2}, r = |x|\}$ 中的极小元 $u_\varepsilon = (u_\varepsilon^1, u_\varepsilon^2, u_\varepsilon^3) = (u_\varepsilon', u_\varepsilon^3)$ 的一些性质, 并称这一极小元为径向极小元. 我们关心的是: 当 $\varepsilon \to 0$时, 对任何 $\alpha > 0$,

$$A_\varepsilon = \int_{B_1}(1 - |u_\varepsilon'|)^\alpha |\nabla u_\varepsilon'|^2 dx,$$

$$B_\varepsilon = \int_{B_1}(1 - |u_\varepsilon'|)^\alpha |u_\varepsilon'|^\alpha \left|\nabla \frac{u_\varepsilon'}{|u_\varepsilon'|}\right|^2 dx,$$

收稿日期: 2006-12-28 修回日期: 2007-02-16

基金项目: 江苏省普通高校自然科学研究计划(06KJB110056)资助项目.

作者简介: 齐龙兴(1980—), 女, 博士研究生, 主要从事应用数学的学习与研究. E-mail: xiaoq@hfuu.edu.cn

$$C_\varepsilon = \int_{B_1} |\det(\nabla u_\varepsilon')|\,dx,$$

关于 ε是否有一致的上界估计. 这是[2]中所研究泛函的问题 7. 本文利用文[4]的方法, 针对径向极小元 u_ε, 给出这一问题的部分回答, 具体地说, 将证明下面的 3个定理:

定理 1　设 u_ε是 $E_\varepsilon(u, B_1)$的径向极小元, 则对任意 $\alpha > 0$, 存在不依赖于 ε的正常数 C, 使当 $\varepsilon \to 0$时, $A_\varepsilon \leqslant C$.

定理 2　设 u_ε是 $E_\varepsilon(u, B_1)$的径向极小元, 则对任意 $\alpha > 1$, 存在不依赖于 ε的正常数 C, 使当 $\varepsilon \to 0$时, $B_\varepsilon \leqslant C$.

定理 3　设 u_ε是 $E_\varepsilon(u, B_1)$的径向极小元, 则对任意 $\alpha > 0$, 存在不依赖于 ε的正常数 C, 使当 $\varepsilon \to 0$时, $C_\varepsilon \leqslant C$.

1　预备知识

利用变分法, 不难得到

引理 1　设 u_ε是泛函 $E_\varepsilon(u, B_1)$的径向极小元, 则 $u_\varepsilon \in H^1(B_1, S^2)$满足

$$-\Delta u = \left(|\nabla u|^2 + \frac{(u^3)^2}{\varepsilon^2}\right)u - \frac{u^3}{\varepsilon^2}e_3, \tag{2}$$

其中 $e_3 = (0, 0, 1)$.

引理 2　设 u_ε是 $E_\varepsilon(u, B_1)$的径向极小元, 则存在与 ε无关的正常数 C, 使得

$$E_\varepsilon(u, B_1) \leqslant \pi|\ln\varepsilon| + C.$$

证明　记 $I(\varepsilon, R) = \min \int_{B_R}\left[\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2\varepsilon^2}(u^3)^2\right]dx,\quad u_\varepsilon \in H^1(B_R, S^2)$,

$$I(\varepsilon, 1) = E_\varepsilon(u_\varepsilon, B_1) = \frac{1}{2}\int_{B_1}|\nabla u_\varepsilon|^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon^2}\int_{B_1}(u_\varepsilon^3)^2 dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{B_{\varepsilon^{-1}}}|\nabla u_\varepsilon|^2 dy + \frac{1}{2}\int_{B_{\varepsilon^{-1}}}(u_\varepsilon^3)^2 dy = I(1, \varepsilon^{-1}),$$

设 u_1是 $I(1, 1)$的解, 令

$$u_2 = u_1,\quad x \in B_1.\quad u_2 = \frac{x}{|x|},\quad x \in B_{\varepsilon^{-1}}\setminus B_1.$$

由于 u_ε是极小元, 我们有 $E_\varepsilon(u_\varepsilon, B_1) \leqslant E_\varepsilon(u_2, B_1)$. 于是

$$I(1, \varepsilon^{-1}) \leqslant \frac{1}{2}\int_{B_{\varepsilon^{-1}}}|\nabla u_2|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{B_{\varepsilon^{-1}}}(u_2^3)^2 dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{B_1}|\nabla u_1|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{B_{\varepsilon^{-1}}\setminus B_1}\left|\nabla\frac{x}{|x|}\right|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{B_1}(u_1^3)^2 dx$$
$$= I(1, 1) + \frac{1}{2}\int_{B_{\varepsilon^{-1}}\setminus B_1}\left|\nabla\frac{x}{|x|}\right|^2 dx = I(1, 1) + \pi\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{r}dr$$
$$= I(1, 1) + \pi\ln\frac{1}{\varepsilon} \leqslant \pi|\ln\varepsilon| + C.$$

将这一结果代入 $I(\varepsilon, 1) = I(1, \varepsilon^{-1})$中, 便得到 $E_\varepsilon(u, B_1) \leqslant \pi|\ln\varepsilon| + C$.

引理 3　设 $\varepsilon = \varepsilon_k$是趋于 0的序列, u_k是 $E_\varepsilon(u, B_1)$的径向极小元, 则存在不依赖于 $\varepsilon \in (0, 1)$的正常数 C及自然数 k_0, 使得当 $k > k_0$时, 便有

$$\frac{1}{\varepsilon_k^2}\int_{B_1}(u^3)^2 dx \leqslant C. \tag{3}$$

证明　记 $V(\varepsilon) = \inf\{E_\varepsilon(u, B_1), u \in H^1(B_1, S^2)\}$, 对给定的 $u \in H^1$, 映射 $\varepsilon \to E_\varepsilon(u, B_1)$是不增的, 且 $\left|\frac{\partial}{\partial\varepsilon}E_\varepsilon(u, B_1)\right| = \frac{1}{\varepsilon^3}\int_{B_1}(u^3)^2 dx$. 对泛函 $E_\varepsilon(u, B_1)$的极小元 $u = u_\varepsilon$, 由 $V(\varepsilon + \Delta) \leqslant E_{\varepsilon+\Delta}(u, B_1) \leqslant E_\varepsilon(u,$

$B_1) = V(\varepsilon)$ 得:

$$\frac{1}{\varepsilon^3}\int_{B_1}(u^3)^2 dx = \lim_{\Delta\to 0}\frac{E_\varepsilon(u, B_1) - E_{\varepsilon+\Delta}(u, B_1)}{\delta} \leqslant \overline{\lim_{\Delta\to 0}}\frac{V(\varepsilon) - V(\varepsilon+\Delta)}{\delta} = |V'(\varepsilon)|.$$

断言　存在 ε_k 的一子列仍记为 ε_k 本身, 使当 $\varepsilon_k\to 0$ 时, $|\varepsilon V'(\varepsilon)| \leqslant 2\pi$. 将这一结果代入上式, 便得引理 3的结论.

下用反证法证明上述断言: 假设存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使当 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ 时, $|V'(\varepsilon)| > \frac{2\pi}{\varepsilon}$. 从 ε 到 ε_0 积分, 得

$$V(\varepsilon) \geqslant \int_\varepsilon^{\varepsilon_0}|V'(\varepsilon)| d\varepsilon - C > 2\pi|\ln\varepsilon| - C.$$

当 ε 适当小时, 与引理 2矛盾.

由 [1] 中定理 3.1易知:

引理 4　设 u_ε 是 $E_\varepsilon(u, B_1)$ 的径向极小元, 则存在 $\varepsilon_* > 0$, 使得对任意 $0 < \varepsilon < \varepsilon_*$, 都有不依赖于 ε 的 $C_1 > 0$, 使得

$$|\nabla u_\varepsilon(x)| \leqslant \frac{C_1}{\varepsilon}. \tag{4}$$

引理 5　设 u_ε 是 $E_\varepsilon(u, B_1)$ 的径向极小元, 则存在不依赖于 $\varepsilon\in(0, 1)$ 的正常数 λ, μ, 使得如果

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{B_1\cap B_{2l\varepsilon}}(u_\varepsilon^3)^2 dx \leqslant \mu, \tag{5}$$

其中 $B_{2l\varepsilon}$ 是某个以 $2l\varepsilon$ 为半径的圆盘, $l > \lambda$, 那么

$$|u_\varepsilon'(x)| \geqslant \frac{1}{2}, \ \forall x\in B_1\cap B_{l\varepsilon}. \tag{6}$$

证明　存在与 ε 无关的常数 $C_2 > 0$, 使对任何 $x\in B_1$, 都有 $|B_1\cap B(x, r)| \geqslant C_2 r^2$, 取 $\lambda = \frac{1}{4C_1}$, $\mu = \frac{C_2}{16}\lambda^2$, 其中 C_1 是引理 4中的常数.

(反证法) 假设存在 $x_0\in B_1\cap B_{l\varepsilon}$ 使得 $|u_\varepsilon(x_0)| < \frac{1}{2}$, 则 $\forall x\in B(x_0, \lambda\varepsilon)$, 由引理 4得

$$|u_\varepsilon'(x) - u_\varepsilon'(x_0)| \leqslant C_1\varepsilon^{-1}|x - x_0| \leqslant C_1\varepsilon^{-1}(\lambda\varepsilon) = C_1\lambda = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow |u_\varepsilon'(x)| \leqslant |u_\varepsilon'(x_0)| + \frac{1}{4} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow (u_\varepsilon^3)^2 = 1 - (u_\varepsilon')^2 > \frac{1}{16} \quad \forall x\in B(x_0, \lambda\varepsilon)$$

故有

$$\int_{B_1\cap B(x_0, \lambda\varepsilon)}(u_\varepsilon^3)^2 dx > \frac{1}{16}|B_1\cap B(x_0, \lambda\varepsilon)| \geqslant C_2\frac{1}{16}(\lambda\varepsilon)^2 = \mu\varepsilon^2,$$

因

$$x_0\in B_1\cap B_{l\varepsilon} \Rightarrow (B_1\cap B(x_0, \lambda\varepsilon)) \subset (B_1\cap B_{2l\varepsilon}),$$

故 $\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{B_1\cap B_{2l\varepsilon}}(u_\varepsilon^3)^2 dx > \mu$, 与 (5) 式矛盾.

所以

$$|u_\varepsilon'(x)| \geqslant \frac{1}{2}.$$

定义　设 u_ε 是 $E_\varepsilon(u, B_1)$ 的径向极小元, λ, μ 是引理 5中的常数, 若

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{B_1\cap B(x^\varepsilon, 2\lambda\varepsilon)}(u_\varepsilon^3)^2 dx \leqslant \mu, \tag{7}$$

则称 $B(x^\varepsilon, \lambda\varepsilon)$ 为好圆盘, 否则, 称 $B(x^\varepsilon, \lambda\varepsilon)$ 为坏圆盘.

设 $\{B(x_i^\varepsilon, \lambda\varepsilon); i\in I\}$ 是一簇满足如下条件的坏圆盘:

$$\text{(i) } x_i^\varepsilon\in B_1, \ i\in I \quad \text{(ii) } B_1\subset\bigcup_{i\in I}B(x_i^\varepsilon, \lambda\varepsilon) \quad \text{(iii) } B(x_i^\varepsilon, \frac{\lambda}{4}\varepsilon)\cap B(x_j^\varepsilon, \frac{\lambda}{4}\varepsilon) = \varnothing, \ i\neq j \tag{8}$$

记 $J_\varepsilon = \{i \in I; B(x_i^\varepsilon, \lambda\varepsilon)$ 是坏圆盘$\}$.

引理 6　存在自然数 N, 使得坏圆盘的个数 $\mathrm{Card}\, J_\varepsilon \leqslant N$.

证明　事实上, (8) 蕴涵 B_1 中每个点都只被有限个圆盘覆盖, 不妨设为 m 个, (m 与 ε无关), 由(3)和坏圆盘的定义可推出

$$\mu\varepsilon^2 \mathrm{Card}\, J_\varepsilon \leqslant \sum_{i\in J_\varepsilon} \int_{B_1\cap B(x_i^\varepsilon, 2\lambda\varepsilon)} (u_\varepsilon^3)^2 \mathrm{d}x \leqslant m \int_{\bigcup_{i\in J_\varepsilon} B_1\cap B(x_i^\varepsilon, 2\lambda\varepsilon)} (u_\varepsilon^3)^2 \mathrm{d}x$$

$$\leqslant m \int_{B_1} (u_\varepsilon^3)^2 \mathrm{d}x \leqslant mC\varepsilon^2 \Rightarrow \mathrm{Card}\, J_\varepsilon \leqslant \frac{mC}{\mu} \leqslant N.$$

类似于[2]中定理的讨论, 也可证得

引理 7　存在 $J \subset J_\varepsilon$ 以及常数 $h \geqslant \lambda$, 使得

$$\bigcup_{i\in J_\varepsilon} B(x_i^\varepsilon, \lambda\varepsilon) \subset \bigcup_{i\in J} B(x_j^\varepsilon, h\varepsilon), \qquad |x_i^\varepsilon - x_j^\varepsilon| > 8h\varepsilon,\ i, j \in J,\ i \neq j.$$

利用引理 7可以修改这簇坏圆盘, 使得修改后的坏圆盘集合 $\{B(x_i^\varepsilon, h\varepsilon);\ i \in J\}$ 满足

$$\bigcup_{i\in J_\varepsilon} B(x_i^\varepsilon, \lambda\varepsilon) \subset \bigcup_{i\in J} B(x_j^\varepsilon, h\varepsilon),\ \mathrm{Card}\, J \leqslant \mathrm{Card}\, J_\varepsilon,\ |x_i^\varepsilon - x_j^\varepsilon| > 8h\varepsilon,\ i, j \in J,\ \sim\ i \neq j.$$

这蕴含新一簇坏圆盘中的任何两个均不相交.

引理 8　设 u_ε 是 $E_\varepsilon(u, B_1)$ 的径向极小元, 则存在不依赖于 $\varepsilon \in (0, 1)$ 的正常数 h, 使得

$$Z_\varepsilon = \{x \in B_1;\ |u_\varepsilon'(x)| < \frac{1}{2}\} \subset B_{h\varepsilon}.$$

证明　(反证法) 假设存在一点 $x_0 \in Z_\varepsilon$, 但 $x_0 \notin B_{h\varepsilon}$, 则 $S_0 = \{x \in B_1;\ |x| = |x_0|\}$ 上的点都满足 $|u_\varepsilon'(x)| < \frac{1}{2}$. 由引理 5和(8)可知, S_0上所有的点都含在坏圆盘中. 另一方面, 由于 $|x_0| \geqslant h\varepsilon$ 所以 S_0不可能只被一个坏圆盘覆盖. 因此 S_0 必须含在至少两个互不相交的坏圆盘中. 但这是不可能的. 故结论成立. 这蕴含零点都含在 $B_{h\varepsilon}$ 中.

2　定理的证明

命题 1　设 $R \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$, 则存在不依赖于 ε的常数 $C > 0$, 使得当 ε适当小时,

$$\int_{B_R\setminus B_{h\varepsilon}} \left|\nabla \frac{x}{|x|}\right|^2 \mathrm{d}x \geqslant 2\pi |\ln\varepsilon| - C. \tag{9}$$

证明　化极坐标, 得

$$\int_{B_R\setminus B_{h\varepsilon}} \left|\nabla \frac{x}{|x|}\right|^2 \mathrm{d}x \geqslant 2\pi \int_{h\varepsilon}^{R} \frac{1}{r} \mathrm{d}r \geqslant 2\pi |\ln\varepsilon| - C.$$

命题 2　对任意 $\alpha > 0$, 有绝对常数 $C > 0$, 使得

$$\int_{B_R\setminus B_{h\varepsilon}} (1 - \sin f)^\alpha \left|\nabla \frac{x}{|x|}\right|^2 \mathrm{d}x \leqslant C.$$

证明　对 $\forall\ \alpha > 0$, 取 $q = \frac{1}{\alpha}$, 利用(3)式可导出

$$\int_{B_R\setminus B_{h\varepsilon}} (1 - \sin f)^\alpha \left|\nabla \frac{x}{|x|}\right|^2 \mathrm{d}x \leqslant C \int_{h\varepsilon}^{R} (1 - \sin f)^\alpha \frac{1}{r} \mathrm{d}r$$

$$\leqslant C\left[\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^1 (1 - \sin^2 f)^{q\alpha} r\mathrm{d}r\right]^{\frac{1}{q}} \varepsilon^{\frac{2}{q}} \left[\int_{h\varepsilon}^{R} r^{\frac{q+1}{1-q}} \mathrm{d}r\right]^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant C\varepsilon^{\frac{2}{q}} (\varepsilon^{\frac{2}{1-q}} - C(R))^{1-\frac{1}{q}} \leqslant C\varepsilon^{\frac{2}{q}} \varepsilon^{-\frac{2}{q}} = C,$$

其中 $\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^1 (1 - \sin^2 f)^{q\alpha} r\mathrm{d}r \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^1 (\cos^2 f) r\mathrm{d}r \leqslant C.$

命题 3　存在绝对常数 $C > 0$, 使得

$$\int_{B_1}\cos^2 f\,|\nabla f|^2 dx+\int_{B_{h\varepsilon}}\sin^2 f\left|\nabla\frac{x}{|x|}\right|^2 dx+\int_{B_1\setminus B_R}\sin^2 f\left|\nabla\frac{x}{|x|}\right|^2 dx\leqslant C.$$

证明　由引理 2可得

$$\int_{B_1}|\nabla u_\varepsilon'|^2 dx\leqslant 2\pi|\ln\varepsilon|+C,$$

又因为 $\nabla u_\varepsilon'=\nabla\left(\sin f\frac{x}{|x|}\right)=\nabla(\sin f)\frac{x}{|x|}+\sin f\nabla\frac{x}{|x|}=\cos f\nabla f\frac{x}{|x|}+\sin f\nabla\frac{x}{|x|}$,

所以

$$\int_{B_1}\cos^2 f|\nabla f|^2 dx+\int_{B_{h\varepsilon}}\sin^2 f\left|\nabla\frac{x}{|x|}\right|^2 dx+\int_{B_1\setminus B_{h\varepsilon}}\sin^2 f\left|\nabla\frac{x}{|x|}\right|^2 dx\leqslant 2\pi|\ln\varepsilon|+C,$$

上式减去(9)式, 得

$$\int_{B_1}\cos^2 f|\nabla f|^2 dx+\int_{B_{h\varepsilon}}\sin^2 f\left|\nabla\frac{x}{|x|}\right|^2 dx+\int_{B_1\setminus B_R}\sin^2 f\left|\nabla\frac{x}{|x|}\right|^2 dx-\int_{B_R\setminus B_{h\varepsilon}}(1-\sin^2 f)\left|\nabla\frac{x}{|x|}\right|^2 dx\leqslant C,$$

再由命题 2得 $\int_{B_R\setminus B_{h\varepsilon}}(1-\sin^2 f)\left|\nabla\frac{x}{|x|}\right|^2 dx\leqslant C$, 代入上式, 得

$$\int_{B_1}\cos^2 f|\nabla f|^2 dx+\int_{B_{h\varepsilon}}\sin^2 f\left|\nabla\frac{x}{|x|}\right|^2 dx+\int_{B_1\setminus B_R}\sin^2 f\left|\nabla\frac{x}{|x|}\right|^2 dx\leqslant C.$$

定理 **1**的证明　由命题 3得

$$\begin{aligned}\int_{(B_1\setminus B_R)\cup B_{h\varepsilon}}(1-|u_\varepsilon'|)^\alpha|\nabla u_\varepsilon'|^2 dx&=\int_{(B_1\setminus B_R)\cup B_{h\varepsilon}}(1-\sin f)^\alpha\left|\nabla\left(\sin f\frac{x}{|x|}\right)\right|^2 dx\\&\leqslant\int_{(B_1\setminus B_R)\cup B_{h\varepsilon}}\left|\nabla(\sin f)\frac{x}{|x|}+\sin f\nabla\frac{x}{|x|}\right|^2 dx\\&\leqslant C\int_{(B_1\setminus B_R)\cup B_{h\varepsilon}}\left(\cos^2 f|\nabla f|^2+\sin^2 f\left|\nabla\frac{x}{|x|}\right|^2\right)dx\\&\leqslant C\left(\int_{B_1}\cos^2 f|\nabla f|^2 dx+\int_{B_{h\varepsilon}}\sin^2 f\left|\nabla\frac{x}{|x|}\right|^2 dx+\int_{B_1\setminus B_R}\sin^2 f\left|\nabla\frac{x}{|x|}\right|^2 dx\right)\\&\leqslant C.\end{aligned}$$

又由命题 2和命题 3得

$$\begin{aligned}\int_{B_R\setminus B_{h\varepsilon}}(1-|u_\varepsilon'|)^\alpha|\nabla u_\varepsilon'|^2 dx&=\int_{B_R\setminus B_{h\varepsilon}}(1-\sin f)^\alpha\left|\nabla\left(\sin f\frac{x}{|x|}\right)\right|^2 dx\\&\leqslant C\left(\int_{B_R\setminus B_{h\varepsilon}}\cos^2 f|\nabla f|^2 dx+\int_{B_R\setminus B_{h\varepsilon}}(1-\sin f)^\alpha\left|\nabla\frac{x}{|x|}\right|^2 dx\right)\\&\leqslant C.\end{aligned}$$

两式相加即得

$$A_\varepsilon=\int_{B_1}(1-|u_\varepsilon'|)^\alpha|\nabla u_\varepsilon'|^2 dx\leqslant C.$$

定理 **2**的证明

$$\begin{aligned}B_\varepsilon&=\int_{B_1}(1-|u_\varepsilon'|)^\alpha|u_\varepsilon'|^\alpha\left|\nabla\frac{u_\varepsilon'}{|u_\varepsilon'|}\right|^2 dx=\int_{B_1}(1-\sin f)^\alpha\sin^\alpha f\left|\nabla\frac{x}{|x|}\right|^2 dx\\&\leqslant\int_{B_1}(1-\sin^2 f)^\alpha\sin^\alpha f\left|\nabla\frac{x}{|x|}\right|^2 dx=\int_{B_1}\cos^{2\alpha}f\sin^\alpha f\left|\nabla\frac{x}{|x|}\right|^2 dx\\&=2\pi\int_0^1\cos^{2\alpha}f\sin^\alpha f\frac{1}{r}dr=C\int_0^\delta\cos^{2\alpha}f\sin^\alpha f\frac{1}{r}dr+\int_\delta^1\cos^{2\alpha}f\sin^\alpha f\frac{1}{r}dr\\&\leqslant C\int_0^\delta\cos^{2\alpha}f f^\alpha\frac{1}{r}dr+C(\delta).\end{aligned}$$

由中值定理可得,

$$
\begin{aligned}
B_\varepsilon &\leqslant C\left[\int_0^\delta\left(\cos^{2\alpha} f\,|\nabla f|^\alpha r^{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \mathrm{d}r\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^\delta\left(r^{\frac{\alpha}{2}-1}\right)^2 \mathrm{d}r\right]^{\frac{1}{2}}+C\\
&\leqslant C\left[\int_0^\delta\left(\cos^4 f\,|\nabla f|^2 r\right)^\alpha \mathrm{d}r\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^\delta r^{\alpha-2}\mathrm{d}r\right]^{\frac{1}{2}}+C\\
&\leqslant C\left[\int_0^\delta\left(\cos^2 f\,|\nabla f|^2 r\right)^\alpha \mathrm{d}r\right]^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\alpha-1}r^{\alpha-1}\Big|_0^\delta\right)\\
&\leqslant C\int_{B_\delta}\cos^2 f\,|\nabla f|^2 \mathrm{d}x\left(\frac{1}{\alpha-1}\delta^{\alpha-1}\right)\qquad(\text{当 }\alpha>1\text{ 时})\\
&\leqslant C\int_{B_1}\cos^2 f\,|\nabla f|^2 \mathrm{d}x\leqslant C.\qquad(\text{由命题 3 得})
\end{aligned}
$$

定理 **3**的证明

$$
\det(\nabla u_\varepsilon') = \begin{vmatrix}\left(\sin f\dfrac{x_1}{|x|}\right)_{x_1} & \left(\sin f\dfrac{x_2}{|x|}\right)_{x_1}\\ \left(\sin f\dfrac{x_1}{|x|}\right)_{x_2} & \left(\sin f\dfrac{x_2}{|x|}\right)_{x_2}\end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix}\cos f\, f_{x_1}\dfrac{x_1}{|x|}+\sin f\dfrac{x_2^2}{|x|^3} & \cos f\, f_{x_1}\dfrac{x_2}{|x|}-\sin f\dfrac{x_1x_2}{|x|^3}\\ \cos f\, f_{x_2}\dfrac{x_1}{|x|}-\sin f\dfrac{x_1x_2}{|x|^3} & \cos f\, f_{x_2}\dfrac{x_2}{|x|}+\sin f\dfrac{x_1^2}{|x|^3}\end{vmatrix}
$$

$$
= \cos f\ \sin f\ \nabla f\frac{x}{|x|^2}
$$

$$
\Rightarrow C_\varepsilon = \int_{B_1}|\cos f|\,|\sin f|\,|\nabla f|\frac{1}{|x|}\mathrm{d}x \leqslant \int_{B_1}|\cos f|\,|\nabla f|\frac{f}{r}\mathrm{d}x.
$$

因 $\cos f(0)=\cos 0=1$, $\cos f$在 0点附近连续, 所以 $\exists\ \delta>0$, 使得当 $r\in(0,\delta)$时,

$$
|\cos f(r)-\cos f(0)|\leqslant\frac{1}{2}\rightarrow\ \cos f(r)\geqslant\cos f(0)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},
$$

$$
\Rightarrow \cos^2 f(r)\geqslant\frac{1}{2}\cos f(r),
$$

$$
\Rightarrow \cos f(r)\leqslant 2\cos^2 f(r).
$$

此时有

$$
\begin{aligned}
C_\varepsilon &\leqslant \int_{B_1\setminus B_\delta}|\cos f|\,|\nabla f|\frac{f}{r}\mathrm{d}x + C\int_{B_\delta}\cos^2 f\,|\nabla f|^2\mathrm{d}x\\
&\leqslant C + C\int_{B_1}\cos^2 f\,|\nabla f|^2\mathrm{d}x\leqslant C.\qquad(\text{由命题 3得.})
\end{aligned}
$$

[参考文献]

[1] Hang F B, Lin F H. Static theory for Planar Ferromagnets and Antiferromagnets[J]. Acta Math Sinica, 2001, 17: 541-580.

[2] Bethuel F, Brezis H, Helein F. Ginzburg-Landau Vortices[M]. Berlin: Birkhauser, 1994.

[3] 刘红艳, 雷雨田. 一类 p-能量泛函径向极小元的 $C^{1,\alpha}$收敛性[J]. 南京师大学报: 自然科学版, 2007, 30(1): 22-27.

[4] 雷雨田. 关于一类 Ginzburg-Landau型泛函径向极小元的注记[J]. 数学研究, 2004, 37: 265-271.

[责任编辑: 陆炳新]