状态脉冲微分方程研究进展

谭远顺[1,2], 陶凤梅[1,3], 陈兰荪[1]

(1. 大连理工大学应用数学系, 辽宁 大连 110024)
(2. 重庆交通大学理学院, 重庆 400074)
(3. 鞍山师范学院数学系, 辽宁 鞍山 114005)

[摘要] 简要介绍了近年来国内外状态脉冲微分方程的最新研究结果及其常用的研究方法和数据处理工具, 以及在生态方面的应用. 相似的研究方法适用于更一般的非线性生态模型.

[关键词] 状态脉冲, 微分方程, 进展

[中图分类号] O175.12 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2007)03-0031-03

Advances in State-Dependent Differential Equation With Impulsive

Tan Yuanshun[1,2], Tao Fengmei[1,3], Chen Lanshun[1]

(1. Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)
(2. Department of Mathematics and Physics, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)
(3. Department of Mathematics, Anshan Normal College, Anshan 116024, China)

Abstract A brief introduction about advances of state-dependent differential equation with impulsive is provided as well as its methods and tools simulating the complex phenomena of the eco-models. It also applies to more nonlinear eco-systems.

Key words state-dependent, impulsive, differential equation, advances

近年来, 由于应用上的需要, 脉冲微分方程的研究不断深入[1,2], 脉冲微分方程的稳定性理论得到了很好的发展, 但是状态脉冲微分方程基于脉冲半动力系统的定性理论的研究还处于发展阶段. 诸如如何判断脉冲半动力系统的周期解或极限环的存在性和稳定性、不变集和吸引子的存在性以及相应的吸引域的大小等都是十分困难的问题, 目前关于这方面的理论工作还很少.

文[3]研究了如下简单的状态脉冲系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, & \\ \dot{y} = x, & x < x_1, \\ \Delta x = -\alpha x, \quad \Delta y = b, & x = x_1. \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x_1 > 0$, $b > 0$, $-1 \leqslant a < 1$为给定常数. 这是一个脉冲半动力系统.

作变换 $u = \frac{x}{x_1}$, $v = \frac{y}{x_1}$, 如果仍记 $x = u$, $y = v$, 且 $\frac{b}{x_1}$ 仍用 b来表示, 则系统(1)变为

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, & \\ \dot{y} = x, & x < x_1, \\ \Delta x = 1-\alpha, \quad \Delta y = b, & x = x_1. \end{cases} \tag{2}$$

显然, 系统(2)在没有脉冲的情况下解具有以下性质: 1.系统有惟一的平衡态 $O(0,0)$, 且是系统的稳定的中心; 2.任意轨道都是以 $O(0,0)$ 为圆心的同心圆; 3.当时间 t增加时, 轨道上的动点 $P(x,y)$ 在轨线上沿逆时针方向运动. 根据 $\sqrt{1-a^2}$ 与 b的大小, 文章用几何分析的方法得到了系统的如下特性(符号的具体表示可参考文[3], 以下类似):

当 $b > 0$, $-1 < a < 1$时, 有

收稿日期: 2007-02-28 修回日期: 2007-04-01.
基金项目: 国家自然科学基金(10671001)、重庆交通大学博士启动基金资助项目.
作者简介: 谭远顺(1974—), 博士, 副教授, 主要从事微分方程定性理论和生物数学的研究. E-mail: tanys@cqu.edu.cn

定理1　当 $\sqrt{1-a^2}<b$ 时,系统(2)存在惟一的非平凡的阶一周期解.

定理2　当 $\sqrt{1-a^2}<b$ 时,系统(2)不存在阶二周期解.

定理3　当 $\sqrt{1-a^2}<b$ 时,系统(2)惟一的非平凡的阶一周期解 $\Pi(P_0^+,P_0)$ 是不稳定的.

当 $b>0$, $a=-1$ 时,有

定理4　当 $b>0$, $a=-1$ 时,脉冲半动力系统(2)存在惟一稳定的阶一周期解;存在阶二周期解,充满阶一周期解的周围;系统(2)有马蹄形吸引子 Ω,其吸引域为 $\overline{U}$.

这篇文章无论是从研究方法还是应用背景都是关于状态脉冲微分方程在国内研究的起步,随后文[4]研究了如下可解的捕食—食饵脉冲系统:

$$\begin{cases}\dot{x}=x(a-by),\\ \dot{y}=y(cx-d), & x\neq h_{\max},\\ \Delta x=-px,\ \Delta y=\tau, & x=h_{\max},\\ x(0^+)=x_0<h_{\max}, & y(0^+)=y_0.\end{cases}\tag{3}$$

这里 a, b, c, d 均为正常数, x 为食饵种群数量, y 为捕食者种群数量. 文章得到了系统(3)存在稳定的阶一周期解的充分条件,并利用Lambert函数的性质得到了周期 T 的具体解析表达式. 类似的方法和结论被文[4]的作者推广到如下情形(见[5]):

$$\begin{cases}\dot{x}=x(a-by),\\ \dot{y}=y\left(\dfrac{\lambda bx}{1+bhx}-d\right), & x\neq h_{\max},\\ \Delta x=-px,\ \Delta y=\tau, & x\neq h_{\max},\\ x(0^+)=x_0<h_{\max}, & y(0^+)=y_0.\end{cases}\tag{4}$$

以及更为一般的情形(见[6]):

$$\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=g(x(t))x(t)-h(x(t),y(t))y(t)+\epsilon f_1(x(t),y(t),\epsilon),\\ \dfrac{dy(t)}{dt}=\gamma h(x(t),y(t))y(t)-dy(t)+\epsilon f_2(x(t),y(t),\epsilon), & x\neq ET,\\ \Delta x(t)=-px(t)+\epsilon I_1(x(t),y(t),\epsilon),\\ \Delta y(t)=\tau+\epsilon I_2(x(t),y(t),\epsilon), & x=ET,\\ x(0^+)=x_0<ET,\quad y(0^+)=y_0.\end{cases}\tag{5}$$

文[6]是关于可解方程的阶段性的文章,它应用后继函数的方法结合Lambert函数的性质,得到了系统(3)阶一阶二周期解的存在性及其阶一周期解的全局稳定性、高阶周期解的不存在性、以及阶一周期解和阶二周期解的关系,并且利用定性的方法和流的性质得到了系统(3)的正不变集、吸引子及其内部结构关系,首次完整地讨论了系统(3). 最后利用近似理论得到系统(5)周期解的存在性.

文[4-6]对害虫的综合控制策略具有理论和应用上的参考价值,也激发了科研工作者进一步去研究不可解的复杂非线性生物动力系统的解析理论及其应用. 文[7]进行了这方面的探索,它将系统(3)推广到如下不可解的具有密度制约项的捕食—食饵系统:

$$\begin{cases}\dot{x}=x(a-rx-by),\\ \dot{y}=y(cx-d), & x<x_1,\\ \Delta x=-px, & \Delta y=q,\ x=x_1.\end{cases}\tag{6}$$

这里 x, y 的意义同系统(3).

文[7]首先利用脉冲半动力系统的性质以及微分方程中著名的Poincare-Bendixson环域定理建立了脉冲微分方程阶一周期解的存在性定理,然后通过比较定理等定性分析方法,对于不可解的非线性系统(6)构造Poincare-Bendixson环域,进而证明了阶一周期解的存在性. 文[8]将Poincare-Bendixson环域推广到了更一般的情形.

不同于文[4-8]的工作,文[9,10]利用后继函数方法讨论了如下具有功能性反应的系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = rx(1-x) - \dfrac{axy}{1+x}, \\ \dot{y} = \dfrac{axy}{1+x} - by, \ x \neq h, \\ \Delta x = -px, \ \Delta y = qy + \tau, \ x = h. \end{cases} \quad (7)$$

和捕食者、食饵都具有密度制约的模型

$$\begin{cases} \dot{x} = x(r_1 - a_{11}x - a_{12}y), \\ \dot{y} = y(-r_2 + a_{21}x - a_{22}y), \ x \neq h, \\ \Delta x = -px, \ \Delta y = q, \ x = h. \end{cases} \quad (8)$$

得到了周期解的存在性以及稳定性, 并用数值模拟的方法探索了系统诸如奇怪吸引子、倍周期分支、混沌等复杂现象. 文[11, 12]用类似的方法对以上模型作了一些推广, 得到相似的结论.

国外关于这方面的工作也很少, 主要是利用打靶法(shooting method)对于如下脉冲的Hybrid系统[13]:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ x^{+} = h_j(x^{-}, y_{-}), \ y_{r,j} = 0, \\ 0 = g(x, y) \equiv g^{0}(x, y) + \sum_{i=1}^{s} g^{i}(x, y), \end{cases} \quad (9)$$

其中

$$g^{i}(x, y) = \begin{cases} g^{i-}(x, y), & y_{r,j} < 0 \\ g^{i+}(x, y), & y_{r,j} > 0, \ i = 1, \cdots, s \end{cases}$$

进行了研究, 得到极限环的存在性并讨论了其分支现象. 这里 $x \in \mathbf{R}^n$ 为系统状态参量, $y \in \mathbf{R}^m$ 为数值参量, x^-, x^+ 分别表示脉冲前后的系统状态参量, y_r 为产生脉冲的选择参量. 关于Hybrid系统更为全面的介绍可参考其它文献.

[参考文献]

[1] Bainov D, Simeonov P. Impulsive Differential Equations: Periodic solution and Applications[M]. New York: John Wiley and Sons Inc, 1993.

[2] Lakshmikantham P, Bainov D, Simeonov P. Theory of Impulsive Differential Equation[M]. New York: John Wiley and Sons Inc, 1989.

[3] 陈兰荪. 非线性微分方程的数学建模与研究[M]. 北京:科学技术出版社, 2004.

[4] Sanyi Tang, Lansun Chen. Modelling and analysis of integrated pest management strategy[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B, 2004, 4: 759-768.

[5] Sanyi Tang, Yanni Xiao, Lansun Chen, et al. Integrated pest management models and their dynamical behaviour[J]. Bulletin of Mathematical Biology, 2005, 67: 115-135.

[6] Sanyi Tang, Robert A Cheke. State-dependent impulsive models of integrated pest management (IPM) strategies and their dynamic consequences[J]. Journal of Mathematical Biology, 2005, 50: 257-292.

[7] Guangzhao Zeng, Lansun Chen, Lihua Sun. Existence of periodic solution of order one of plannar impulsive autonomous system[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2006, 186: 466-481.

[8] 曾广钊, 陈兰荪. 脉冲与时变生态模型的解的周期性及渐近性[D]. 大连: 大连理工大学数学系, 2005.

[9] Guirong Jiang, Qishao Lu, Linning Qian. Complex dynamics of a holling type II prey-predator system with state feedback control[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2007, 31: 448-461.

[10] Guirong Jiang, Qishao Lu. Impulsive state feedback control of a prey-predator model[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2007, 200: 193-207.

[11] Guirong Jiang, Qishao Lu, Linping Peng. Impulsive ecological control of stage-structured pest management system[J]. Mathematical Biosciences and Engineering, 2005, 2: 329-344.

[12] Guirong Jiang, Qishao Lu, Linning Qian. Chaos and its control in an impulsive differential system[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 10.1016/j.chaos, 2005, 9: 77.

[13] Vaibhav Donde, Ian A Hiskens. Shooting methods for Locating grazing phenomena in hybrid systems[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2006, 16(3): 671-692.

[责任编辑: 陆炳新]