一类特殊的算术级数存在性

方金辉

(南京师范大学数学与计算机科学学院, 江苏 南京 210097)

[摘要] 已有结论表明: 素数集中存在任意长的算术级数. 且对任意正整数 k, 任何具有正密度的素数子集都含一 k项算术级数. 考虑 $4h+1$型素数 (h为正整数), 显然可得结论: 一定存在 k项算术级数, 其中每项都能表成 m^2+n^2的形式 (m, n为整数). 当 $k=4$时, 有无穷多组这种类型的 4项算术级数 $(n-1)^2+(n-8)^2$, $(n-7)^2+(n+4)^2$, $(n+7)^2+(n-4)^2$, $(n+1)^2+(n+8)^2$. 注意到 $8^2+1^2=7^2+4^2$, 为了回答: 是否存在互异正整数 a, b, c, d满足 $a^2+b^2=c^2+d^2$, 使得对任何正整数 n, 8个数 $(n+a)^2+(n+b)^2$, $(n+a)^2+(n-b)^2$, $(n-a)^2+(n+b)^2$, $(n-a)^2+(n-b)^2$, $(n+c)^2+(n+d)^2$, $(n+c)^2+(n-d)^2$, $(n-c)^2+(n+d)^2$, $(n-c)^2+(n-d)^2$中总存在 5项算术级数这一问题, 本文采用组合方法, 证明了不存在这样的正整数 a, b, c, d. 同时提出了 3个猜想.

[关键词] 算术级数, Green-Tao定理, 素数, 平方和

[中图分类号] O156.1 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2007)04-0017-03

Existence of a Class of Special Arithmetic Progressions

Fang Jinhui

(School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

Abstract It has been proved that the primes contain arbitrarily long arithmetic progressions. Furthermore for any positive integer k, any subset of the primes with positive relative upper density contains a k-term arithmetic progression. Considering the primes which can be written as $4h+1$ (h is positive integer), we can obviously have the conclusion: there exists a k-term arithmetic progression and every term can be written as m^2+n^2 (m, n are positive integers). When $k=4$, there are infinitely such 4-term arithmetic progressions $(n-1)^2+(n-8)^2$, $(n-7)^2+(n+4)^2$, $(n+7)^2+(n-4)^2$, $(n+1)^2+(n+8)^2$. Noting that $8^2+1^2=7^2+4^2$, in order to answer the problem that whether there exist four distinct positive integers a, b, c, d with $a^2+b^2=c^2+d^2$ such that there is a 5-term arithmetic progression in $(n+a)^2+(n+b)^2$, $(n+a)^2+(n-b)^2$, $(n-a)^2+(n+b)^2$, $(n-a)^2+(n-b)^2$, $(n+c)^2+(n+d)^2$, $(n+c)^2+(n-d)^2$, $(n-c)^2+(n+d)^2$, $(n-c)^2+(n-d)^2$ for any positive integer n, by using combinatorial method we prove that there do not exist such positive integers a, b, c, d. Beyond this, three conjectures are posed in this paper.

Key words arithmetic progression, Green-Tao theorem, prime, sum of squares

0 引言

Ben Green和 Terence Tao[1]证明了著名的猜想: 素数集中存在任意长的算术级数. 他们在文中还指出用同样的方法可证明: 对任意正整数 k, 任何具有正密度的素数子集都含一 k项算术级数. 考虑 $4h+1$型素数 (h为正整数), 显然可得结论: 一定存在 k项算术级数, 其中每项都能表成 m^2+n^2的形式 (m, n为整数). 当 $k=4$时, Heath-Brown[2]具体构造出无穷多组这种类型的 4项算术级数 $(n-1)^2+(n-8)^2$, $(n-7)^2+(n+4)^2$, $(n+7)^2+(n-4)^2$, $(n+1)^2+(n+8)^2$. 注意到 $8^2+1^2=7^2+4^2$, 陈永高教授提出如下问题: 是否存在互异正整数 a, b, c, d满足 $a^2+b^2=c^2+d^2$, 使得对任何正整数 n, 8个数 $(n+a)^2+(n+$

收稿日期: 2007-02-28 修回日期: 2007-06-10

基金项目: 国家自然科学基金 (10471064)资助项目.

作者简介: 方金辉 (1984—), 女, 博士研究生, 主要从事数论的学习与研究. E-mail: fangjinhui1114@163.com

通讯联系人: 陈永高 (1962—), 教授, 博士生导师, 主要从事数论的教学与研究. E-mail: ygchen@njnu.edu.cn

$b)^2$, $(n+a)^2+(n-b)^2$, $(n-a)^2+(n+b)^2$, $(n-a)^2+(n-b)^2$, $(n+c)^2+(n+d)^2$, $(n+c)^2+(n-d)^2$, $(n-c)^2+(n+d)^2$, $(n-c)^2+(n-d)^2$中总存在5项算术级数?本文回答了这个问题,证明了不存在这样的正整数a, b, c, d.

定理　对满足$a^2+b^2=c^2+d^2$的互不相同的正整数a, b, c, d及任意正整数n, 8个数$(n+a)^2+(n+b)^2$, $(n+a)^2+(n-b)^2$, $(n-a)^2+(n+b)^2$, $(n-a)^2+(n-b)^2$, $(n+c)^2+(n+d)^2$, $(n+c)^2+(n-d)^2$, $(n-c)^2+(n+d)^2$, $(n-c)^2+(n-d)^2$中一定不存在5项算术级数.

1　定理的证明

不妨设$a>b$, $c>d$. 注意到$a^2+b^2=c^2+d^2$, 我们只要证明$a+b$, $a-b$, $-a+b$, $-a-b$, $c+d$, $c-d$, $-c+d$, $-c-d$中不存在5项算术级数.

假设$a+b$, $a-b$, $-a+b$, $-a-b$, $c+d$, $c-d$, $-c+d$, $-c-d$中存在5项算术级数. 不妨设公差小于零(若公差大于零, 可将数列从后往前排列), 因此该算术级数递减, 可设为a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. 对$a+b$, $a-b$, $-a+b$, $-a-b$与$c+d$, $c-d$, $-c+d$, $-c-d$分开考虑, 下面分情况讨论:

(1) 若$c+d$, $c-d$, $-c+d$, $-c-d$均在算术级数中, 则$a+b$, $a-b$, $-a+b$, $-a-b$中存在1项只会出现在首尾或中间位置.

如果在首项, 那么$a_2=c+d$, $a_3=c-d$, $a_4=-c+d$, $a_5=-c-d$, 此时$c=2d$, $a_1=5d$, 而$a\pm b$, $-a\pm b$中只能是$a+b=5d$或$a-b=5d$, 代入$a^2+b^2=5d^2=c^2+d^2$均无解, 矛盾.

如果在末项, 那么$a_1=c+d$, $a_2=c-d$, $a_3=-c+d$, $a_4=-c-d$, 此时$c=2d$, $a_5=-5d$, 同上可得矛盾.

如果在中间, 那么$a_2=c-d$, $a_4=-c+d$, 此时$a_3=0$, 而$a\pm b\neq 0$, $-a\pm b\neq 0$, 矛盾.

因此$c+d$, $c-d$, $-c+d$, $-c-d$不可能均在算术级数中, 同理$a+b$, $a-b$, $-a+b$, $-a-b$也不可能均在算术级数中.

(2) 如果$c+d$, $c-d$, $-c+d$, $-c-d$中有3项在算术级数中, 那么下面对这3项的位置进行讨论, 再考虑将$a+b$, $a-b$, $-a+b$, $-a-b$中取2项插入其中组成算术级数.

①这3项分别为a_1, a_2, a_3, 下面讨论这3项在$c+d$, $c-d$, $-c+d$, $-c-d$中的可能取法.

若$a_1=c+d$, $a_3=-c-d$, 则$a_2=0$, 而$c-d\neq 0$, $-c+d\neq 0$, 矛盾.

若$a_1=c+d$, $a_2=c-d$, $a_3=-c+d$, 则$c=2d$, $a_4=-3d$, $a_5=-5d$, 在$a\pm b$, $-a\pm b$中只能是$-a+b=-3d$, $-a-b=-5d$, 得$b=d$, 与a, b, c, d互异矛盾.

若$a_1=c-d$, $a_2=-c+d$, $a_3=-c-d$, 则$c=2d$, $a_4=-5d$, $a_5=-7d$, 同上得$b=d$, 矛盾. 因此$c+d$, $c-d$, $-c+d$, $-c-d$在算术级数中不可能是a_1, a_2, a_3. 同理, 不可能是a_3, a_4, a_5 3项(若存在a_3, a_4, a_5是$c+d$, $c-d$, $-c+d$, $-c-d$中3项, 将整个5项换为相反数, 得一递增排列, 再将排列颠倒顺序, 则存在上面所讨论类型排列, 矛盾).

②这3项分别为a_1, a_2, a_4, 下面讨论这3项在$c+d$, $c-d$, $-c+d$, $-c-d$的可能取法.

若$a_1=c+d$, $a_2=c-d$, $a_4=-c+d$, 则$a_3=0$, 矛盾.

若$a_1=c+d$, $a_2=c-d$, $a_4=-c-d$, 则$c=2d$, $a_3=-d$, $a_5=-5d$, 在$a\pm b$, $-a\pm b$中只能是$-a+b=-d$, $-a-b=-5d$, 得$a=3d$, $b=2d$, 与$a^2+b^2=13d^2=c^2+d^2$矛盾.

若$a_1=c+d$, $a_2=-c+d$, $a_4=-c-d$, 则$d=2c$, 与$d<c$矛盾.

若$a_1=c-d$, $a_2=-c+d$, $a_4=-c-d$, 则$c=\dfrac{3}{2}d$, $a_3=-\dfrac{3}{2}d$, $a_5=-\dfrac{7}{2}d$, 在$a\pm b$, $-a\pm b$中只可能是$-a+b=-\dfrac{3}{2}d$, $-a-b=-\dfrac{7}{2}d$得$b=d$, 矛盾. 因此$c+d$, $c-d$, $-c+d$, $-c-d$在算术级数中不可能是a_1, a_2, a_4, 同上讨论, 不可能是a_2, a_4, a_5 3项.

③这3项分别为a_1, a_2, a_5, 下面讨论这3项在$c+d$, $c-d$, $-c+d$, $-c-d$的可能取法.

若$a_1=c+d$, $a_2=c-d$, $a_5=-c+d$, 则$c=4d$, $a_3=d$, $a_4=-d$, 在$a\pm b$, $-a\pm b$中只能是$a+b=d$或$a-b=d$代入$a^2+b^2=17d^2$均无解, 矛盾.

若$a_1=c+d$, $a_5=-c-d$, 则$a_3=0$, 矛盾.

若 $a_1 = c-d$, $a_2 = -c+d$, $a_5 = -c-d$, 则 $c = \frac{4}{3}d$, $b = \frac{1}{3}d$, 得 $a = c = \frac{4}{3}d$, 矛盾. 因此 $c+d$, $c-d$, $-c+d$, $-c-d$ 在算术级数中不可能是 a_1, a_2, a_5, 也不可能是 a_1, a_4, a_5 3项.

④这 3项分别为 a_1, a_3, a_4, 下面讨论这 3项在 $c+d$, $c-d$, $-c+d$, $-c-d$的可能取法.

若 $a_1 = c+d$, $a_3 = c-d$, $a_4 = -c+d$, 则 $c = \frac{3}{2}d$, $a_2 = \frac{3}{2}d$, $a_5 = -\frac{3}{2}d$, 在 $a \pm b$, $-a \pm b$ 中只能是 $a+b = \frac{3}{2}d$ 或 $a-b = \frac{3}{2}d$, 代入 $a^2 + b^2 = \frac{13}{4}d^2 = c^2 + d^2$均无解, 矛盾.

若 $a_1 = c+d$, $a_3 = c-d$, $a_4 = -c-d$, 则 $d = 2c$, 与 $d < c$矛盾.

若 $a_1 = c+d$, $a_3 = -c+d$, $a_4 = -c-d$, 则 $c = 2d$, $a_2 = d$, $a_5 = -5d$, 在 $a \pm b$, $-a \pm b$ 中只可能是 $a+b = d$, $-a+b = -5d$ 或 $a-b = d$, $-a-b = -5d$, 得 $b = -2d$ 与 $b > 0$, $d > 0$矛盾, 或 $a = 3d$, $b = 2d$ 与 $a^2 + b^2 = 5d^2 = c^2 + d^2$矛盾.

若 $a_1 = c-d$, $a_3 = -c+d$, $a_4 = -c-d$, 则 $a_2 = 0$矛盾. 因此 $c+d$, $c-d$, $-c+d$, $-c-d$在算术级数中不可能是 a_1, a_3, a_4, 也不可能是 a_2, a_3, a_5 3项.

⑤这 3项分别为 a_1, a_3, a_5, 则这 3项本身也成算术级数, 只可能是 $c+d$, $c-d$, $-c+d$ 或 $c-d$, $-c+d$, $-c-d$ 3项.

若 $a_1 = c+d$, $a_3 = c-d$, $a_5 = -c+d$, 则 $a_4 = 0$, 矛盾.

若 $a_1 = c-d$, $a_3 = -c+d$, $a_5 = -c-d$, 则 $a_2 = 0$, 矛盾. 因此 $c+d$, $c-d$, $-c+d$, $-c-d$ 在算术级数中不可能是 a_1, a_3, a_5 3项.

⑥ 这 3项分别为 a_2, a_3, a_4, 同上面 ⑤中讨论, 只会出现 2种可能.

若 $a_2 = c+d$, $a_3 = c-d$, $a_4 = -c+d$, 则 $c = 2d$, $a_1 = 5d$, $a_5 = -3d$, 则只可能是 $a+b = 5d$, $-a+b = -3d$ 或 $a-b = 5d$, $-a-b = -3d$, 解得 $b = d$ 或 $b = -d$ 矛盾.

若 $a_2 = c-d$, $a_3 = -c+d$, $a_4 = -c-d$, 则 $c = 2d$, $a_1 = 3d$, $a_5 = -5d$, 则只可能是 $a+b = 3d$, $-a+b = -5d$或 $a-b = 3d$, $-a-b = -5d$, 解得 $b = -d$ 或 $b = d$矛盾. 因此 $c+d$, $c-d$, $-c+d$, $-c-d$ 在算术级数中不可能是 a_2, a_3, a_4 3项.

由上讨论得 $c+d$, $c-d$, $-c+d$, $-c-d$ 中 3项不可能在算术级数的任何位置, 因此 $c+d$, $c-d$, $-c+d$, $-c-d$中不可能有 3项在算术级数中, 同理, $a+b$, $a-b$, $-a+b$, $-a-b$中也不可能有 3项在算术级数中.

由(1), (2)可得: 互异正整数 a, b, c, d, 若满足 $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, 则在 $a \pm b$, $-a \pm b$, $c \pm d$, $-c \pm d$ 中不存在 5项成算术级数. 定理证毕.

2 一些猜想

陈永高教授还提出了如下猜想, 这些猜想目前还没有被证明.

猜想 1: 存在互异正整数 a, b, c, d, e, f, 满足 $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = e^2 + f^2$, 使得 $a \pm b$, $-a \pm b$, $c \pm d$, $-c \pm d$, $e \pm f$, $-e \pm f$ 中存在 6项成算术级数.

猜想 2: 对任意正整数 m, 存在互异正整数 a_1, b_1, a_2, b_2, …, a_s, b_s, 满足 $a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = \cdots = a_s^2 + b_s^2$, 使得 $a_1 \pm b_1$, $-a_1 \pm b_1$, $a_2 \pm b_2$, $-a_2 \pm b_2$, …, $a_s \pm b_s$, $-a_s \pm b_s$ 中存在长为 m 的算术级数.

猜想 3: 存在互异整数 a_1, b_1, a_2, b_2, …, a_k, b_k 满足 $a_1^2 + b_1^2$, $a_2^2 + b_2^2$, …, $a_k^2 + b_k^2$ 成算术级数且 $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$, …, $a_k + b_k$ 也成算术级数.

附注: 当 $k = 3$时, 取 $a_1 = 5$, $b_1 = -6$, $a_2 = -3$, $b_2 = 8$, $a_3 = 2$, $b_3 = 9$满足 $a_1^2 + b_1^2$, $a_2^2 + b_2^2$, $a_3^2 + b_3^2$ 和 $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$, $a_3 + b_3$ 分别成算术级数, 所以我们可设猜想 3中的 $k \geqslant 4$

致谢: 衷心感谢导师陈永高教授的悉心指导! 感谢石莹同学看了初稿并提出一些修改意见!

[参考文献]

[1] Ben Green, Terence Tao. The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions[J]. arXiv: math/0404188.

[2] Heath-Brown D R. Linear Relations Amongst Sums of Two Squares[C] // Number Theory and Algebraic Geometry. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

[责任编辑: 陆炳新]