

# 椭圆外区域各向异性问题的自然边界元法

赵自霞, 杜其奎

(南京师范大学数学与计算机科学学院, 江苏 南京 210097)

[摘要] 以 Helmholtz 方程为例研究一类椭圆边界各向异性外问题的自然边界元方法. 通过自然边界归化, 获得了该问题的自然积分方程和 Poisson 积分公式, 给出自然积分方程的数值解法, 最后给出数值例子以示文中方法的可行性与有效性.

[关键词] 各向异性问题, Helmholtz 方程, 椭圆外区域, 自然边界归化

[中图分类号] O 241. 82 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2008) 01-0026-06

## Natural Boundary Element Method for an Anisotropic Problem in an Exterior Elliptic Domain

Zhao Zixia, Du Qiku

(School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

**Abstract** The natural boundary element method for an anisotropic problem of Helmholtz equation in an exterior elliptic domain is investigated. By the principle of natural boundary reduction, the natural integral equation and the Poisson integral formula of this problem are obtained, and a numerical method of the natural integral equation is discussed. Finally, some numerical examples are presented to demonstrate the performance of this method.

**Key words** anisotropic problem, Helmholtz equation, exterior elliptic problem, natural boundary reduction

20 世纪 70 年代末, 由我国计算数学家冯康教授首创并由其本人和余德浩教授发展起来的自然边界元方法, 有许多优点, 如易于实现, 数值稳定性好, 与有限元具有相同的变分形式, 可与有限元自然而直接地耦合. 用有限元与自然边界元耦合法求解外问题时人们通常选取圆周或球面做人工边界. 但对具有长条形内边界的外问题, 以圆周或球面并非最佳选择, 它将会导致大量的计算, 甚至无法获得满意的结果. 可以预测, 应用椭圆人工边界可能会更经济.

目前, 椭圆外区域上的自然边界元方法的研究工作已在调和问题中取得了一些进展 (二维问题<sup>[1]</sup>, 三维问题<sup>[2]</sup>和各向异性问题<sup>[3]</sup>). 对于 Helmholtz 方程, 目前研究很少<sup>[4, 5]</sup>.

本文借助于 [1, 3] 中的方法, 以一类各向异性常系数 Helmholtz 方程为例, 巧妙地利用坐标变换及圆边界上 Helmholtz 方程的自然积分算子和 Poisson 积分公式<sup>[6]</sup>, 研究各向异性问题基于椭圆边界的自然边界元方法, 给出了理论分析. 并用数值例子进一步证明了该方法的可行性和有效性.

设  $\Gamma$  是一椭圆, 即  $\Gamma = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ , 不妨设  $a > b > 0$ .  $\Omega$  是以  $\Gamma$  为内边界的外部区域. 考虑如下二维 Helmholtz 方程外问题

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0 \quad \Omega \text{ 内}, \quad (1)$$

收稿日期: 2007-09-26

基金项目: 国家自然科学基金 (10471067)、江苏省基础 Research 计划 (BK2006215) 资助项目.

作者简介: 赵自霞 (1982-), 女, 硕士研究生, 研究方向: 微分方程数值解. E-mail: xianv0313@163.com

通讯联系人: 杜其奎 (1963-), 教授, 博士生导师, 研究方向: 有限元、边界元方法. E-mail: duqiku@njnu.edu.cn

$$an_x \frac{\partial u}{\partial x} + bn_y \frac{\partial u}{\partial y} = g \quad \Gamma \text{ 上}, \quad (2)$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \sqrt{r} \left[ \frac{\partial u}{\partial r} - ku \right] = 0 \quad (3)$$

其中 (3) 式为无穷远处的辐射条件,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $k \neq 0$  选取  $k$  的符号使得  $\ln(k) \geq 0$  若  $\ln(k) = 0$  取  $k > 0$   $n$  是边界  $\Gamma$  的单位外法线方向, 指向由  $\Gamma$  包围的区域内部. 经计算可得

$$n = - \left[ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{x}{a}, \frac{y}{b} \right). \quad (4)$$

采用坐标变换  $x = \sqrt{a}\xi$ ,  $y = \sqrt{b}\eta$ , 则方程 (1) 可化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + k^2 u = 0$$

区域  $\Omega$  和边界  $\Gamma$  相应地转化为  $\Omega$  和  $\Gamma$ , 且  $\Omega = \{(\xi, \eta) \mid \xi^2 + \eta^2 > 1\}$ ,  $\Gamma = \{(\xi, \eta) \mid \xi^2 + \eta^2 = 1\}$ .  $\nu$  为  $\Gamma$  上任一点的单位外法向量. (1)、(2) 分别转化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + k^2 u = 0 \quad \Omega \text{ 内}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \Gamma \text{ 上}, \quad (6)$$

其中  $g = g \sqrt{\frac{\xi^2}{a} + \frac{\eta^2}{b}}$ . 无穷远条件 (3) 仍成立.

## 1 自然边界归化

令  $\xi = r \cos \theta$ ,  $\eta = r \sin \theta$  并记  $u_0(\theta) = u(1, \theta)$ , 则在平面极坐标系里, 应用 Fourier 级数展开, 可得问题 (5)、(6) 及 (3) 的 Poisson 积分公式

$$u(r, \theta) = \mathcal{P}u_0(\theta), \quad r > 1 \quad (7)$$

及自然积分方程

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \mathcal{K}u_0(\theta), \quad r = 1, \quad (8)$$

其中

$$\mathcal{P}v(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n G_n(kr, k) \cos n(\theta - \theta') \right] \cdot v(\theta') d\theta', \quad r > 1 \quad (9)$$

$$G_n(kr, k) = \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)}(k)}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (10)$$

$$\mathcal{K}v(\theta) = \frac{k}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n H_n(k) \cos n(\theta - \theta') \right] \cdot v(\theta') d\theta', \quad (11)$$

$$H_n(z) = - \frac{\frac{d}{dz} H_n^{(1)}(z)}{H_n^{(1)}(z)} = \frac{H_{n+1}^{(1)}(z)}{H_n^{(1)}(z)} - \frac{n}{z}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (12)$$

上述式中的  $\varepsilon_n$  的取值: 当  $n = 0$  时,  $\varepsilon_n = 1$ ; 当  $n > 0$  时,  $\varepsilon_n = 2$ .  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = g$  已知, 由 (8) 式求出  $u_0(\theta)$ , 从而利用 (7) 式便可数值求出问题 (5)、(6) 及 (3) 在  $\Omega$  中任一点  $(r, \theta)$  处的近似值  $u^h(r, \theta)$ .

## 2 自然积分方程的数值解法

设  $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , 则 (8) 对应的变分问题为求  $u_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , 使得

$$\hat{D}(u_0, v_0) = \langle g, v_0 \rangle, \quad \forall v_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad (13)$$

其中

$$\hat{D}(u_0, v_0) = \langle \mathcal{K}u_0, v_0 \rangle = \int_{\Gamma} \mathcal{K}u_0(\theta) \cdot v_0(\theta) \, ds$$

(14)

$$\langle g, v_0 \rangle = \int_{\Gamma} g \cdot v_0 \, ds$$

(15)

易知,  $\hat{D}(u_0, v_0)$  是  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  上对称连续的双线性形式.

**定理 1** 若  $g \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , 则变分问题 (13) 在  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  中有惟一解.

**证** 设  $\omega \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . 令  $u(r, \theta) = P\omega(\theta)$ , 则  $u(r, \theta)$  满足 (5) 和 (3),  $u(1, \theta) = \omega(\theta)$ . 记  $\Omega_d = \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 < d^2\}$ ,  $\Gamma_d = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = d\}$ .

在区域  $\Omega_d$  上对函数  $u$  及  $u$  应用第一 Green 公式, 可得

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 + |ku|^2 \, ds + \operatorname{Im}(k) \int_{\Gamma} (|\dot{y} u|^2 + |ku|^2) \, dx \right] = \operatorname{Im} \left[ k \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds \right] = \operatorname{Im}(-k \hat{D}(\omega, \omega)).$$

由 Rellich 定理 (见 [7]) 可知, 当  $\operatorname{Im}(k) \geq 0$  若  $u \neq 0$  则上式左边大于零. 于是若  $\omega(\theta) \neq 0$   $\operatorname{Im}(-k \hat{D}(\omega, \omega)) > 0$  由此定理 1 得证.

现在对圆周  $\Gamma$  作有限元剖分, 剖分满足通常的正规条件. 为简单起见, 我们采用均匀剖分. 设  $S_h(\Gamma) \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  为适当选取的基函数所张成的  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  的有限元子空间. 于是 (13) 的近似变分问题为求  $u_0^h \in S_h(\Gamma)$ , 使得

$$\hat{D}(u_0^h, v_0^h) = \langle g, v_0^h \rangle, \quad \forall v_0^h \in S_h(\Gamma).$$

(16)

由于  $S_h(\Gamma) \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , Lax-Milgram 定理仍然保证变分问题在空间  $S_h(\Gamma)$  中有惟一解.

**定理 2** 设  $u_0$  是变分问题 (13) 的解,  $u_0^h$  是离散的变分问题 (16) 的解. 若  $S_h(\Gamma)$  是由分段  $k$  次多项式构成 ( $k \geq 1$ ) 且  $u_0 \in H^{k+1}(\Gamma)$ , 则存在与  $h$  无关的正常数  $C$  使如下不等式成立

$$\|u_0 - u_0^h\|_{L^2(\Gamma)} \leq Ch^{k+1} \|u_0\|_{H^{k+1}(\Gamma)}.$$

定理 2 的证明类似于 [8] 中的定理 1.16

**定理 3** 设  $u(r, \theta)$  为外 Neumann 问题 (5)、(6) 与 (3) 的解,  $u^h(r, \theta)$  是由 Poisson 积分公式 (7) 求得的近似解, 则存在与  $h$  无关但与  $r$  有关的正常数  $C_r$  使得如下不等式成立

$$\|u(r, \theta) - u^h(r, \theta)\| \leq C_r \|u_0 - u_0^h\|_{L^2(\Gamma)}, \quad (r, \theta) \in \Omega.$$

(17)

**证** 应用 Schwarz 不等式可得

$$\|u(r, \theta) - u^h(r, \theta)\| = \|P(u_0(\theta) - u_0^h(\theta))\| \leq \left[ \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} |\varepsilon_n G_n(kr, k)|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \|u_0 - u_0^h\|_{L^2(\Gamma)}.$$

上述式中右端的级数是收敛的, 所以由此便可得到定理 3 中的不等式 (17) 成立.

3 刚度矩阵系数的计算公式

以下分别给出采用分段线性元、分段二次元时刚度矩阵系数的计算公式.

1 分段线性元. 取均匀剖分下分段线性基函数

$$L_i(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{h}(\theta - \theta_{i-1}), & \theta \in [\theta_{i-1}, \theta_i], \\ \frac{1}{h}(\theta_{i+1} - \theta), & \theta \in [\theta_i, \theta_{i+1}], \\ 0 & \text{其它,} \end{cases}$$

(18)

其中  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $\theta_i = i \cdot h$ ,  $h = \frac{2\pi}{N}$ . 显然  $L_i(\theta_j) = \delta_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, N$ ,  $\sum_{i=1}^N L_i(\theta) = 1$  且  $\{L_i(\theta)\} \subset$

$H^1(\Gamma) \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . 由于

$$u_0^h(\theta) = \sum_{i=1}^N u_{0i} \cdot L_i(\theta),$$

所以由 (16) 可得线性代数方程组

$$\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{U} = \boldsymbol{b}, \quad (19)$$

其中

$$\boldsymbol{Q} = [q_{ij}]_{N \times N}, \boldsymbol{U} = (u_{01}, u_{02}, \dots, u_{0N})^T, \boldsymbol{b} = [b_1, b_2, \dots, b_N]^T, b_i = \int_0^{2\pi} g(\theta) L_i(\theta) d\theta \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$q_{ij} = D(\hat{L}_i, L_j) = \frac{k}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n H_n(k) \cos n(\theta - \theta') \right] L_i(\theta) L_j(\theta') d\theta d\theta'.$$

经计算不难得到

$$q_{ij} = \frac{kh^2}{2\pi} \left\{ H_0(k) + \frac{32}{h^4} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{H_n(k)}{n^4} \cdot \left( \sin \frac{nh}{2} \right)^4 \cos(i-j)nh \right] \right\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (20)$$

相应地 (7) 的近似解为

$$u^h(r, \theta) = \frac{h}{2\pi} \sum_{i=1}^N \left[ G_0(kr, k) + \frac{8}{h^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{G_n(kr, k)}{n^2} \sin^2\left(\frac{nh}{2}\right) \cos n(\theta - jh) \right] u_{0i} \quad r > 1 \quad (21)$$

易见  $q_{ij} = q_{ji}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, N$ . 令

$$a_m = \frac{kh^2}{2\pi} \left\{ H_0(k) + \frac{32}{h^4} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{H_n(k)}{n^4} \cdot \left( \sin \frac{nh}{2} \right)^4 \cos mnh \right] \right\}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad (22)$$

于是

$$q_{ij} = a_{i-j+1} = q_{ji} \quad i, j = 1, 2, \dots, N, \quad \boldsymbol{Q} = (a_{i-j+1}) = ((a_0, a_1, \dots, a_{N-1})). \quad (23)$$

$\boldsymbol{Q}$  的右端表示由  $a_0, a_1, \dots, a_{N-1}$  生成的循环矩阵

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{N-1} \\ a_{N-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{N-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{bmatrix}_{N \times N}, \quad a_i = a_{N-i}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$

因此, 只要计算  $\left[\frac{N}{2}\right] + 1$  个数  $a_0, a_1, \dots, a_{\frac{N}{2}}$  就能生成  $N$  阶矩阵  $\boldsymbol{Q}$ , 这使得计算量与存储量大为减少. 对于

$a_m$  的收敛性是显然的, 因为  $a_m$  与级数  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$  的收敛性等价.

2 二次边界元. 取均匀剖分下分段二次基函数, 即满足

$$\varphi_k(\theta_j) = \delta_{kj}, \quad k, j = 1, 2, \dots, 2N \quad (24)$$

的如下函数族

$$\varphi_{2i-1}(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{h^2}(\theta - \theta_{2i-2})(\theta_{2i} - \theta), & \theta \in [\theta_{2i-2}, \theta_{2i}], \\ 0, & \text{其它,} \end{cases} \quad (25)$$

$$\varphi_{2i}(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2h^2}(\theta - \theta_{2i-1})(\theta - \theta_{2i-2}), & \theta \in [\theta_{2i-2}, \theta_{2i}], \\ \frac{1}{2h^2}(\theta - \theta_{2i+1})(\theta - \theta_{2i+2}), & \theta \in [\theta_{2i}, \theta_{2i+2}], \\ 0, & \text{其它,} \end{cases} \quad (26)$$

其中  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $\theta_j = j \cdot h$ ,  $h = \frac{\pi}{N}$ . 显然  $\{\varphi_i(\theta)\} \subset H^1(\Gamma) \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , 且  $\sum_{i=1}^{2N} \varphi_i(\theta) = 1$

$$u_0^h(\theta) = \sum_{i=1}^{2N} u_{0i} \cdot \varphi_i(\theta). \quad (27)$$

由变分问题 (13) 可得线性代数方程组  $\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{U} = \boldsymbol{b}$ , 其中

$$\boldsymbol{Q} = (q_{ij})_{2N \times 2N}, \boldsymbol{U} = (u_{01}, u_{02}, \dots, u_{0, 2N})^T, \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \dots, b_{2N})^T,$$

$$b_i = \int_0^{2\pi} g(\theta) \varphi_i(\theta) d\theta \quad i = 1, 2, \dots, 2N,$$

$$q_{ij} = D(\varphi_i, \varphi_j) = \frac{k}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n H_n(k) \cos n(\theta - \theta') \right] \varphi_i(\theta) \varphi_j(\theta') d\theta d\theta'.$$

经计算不难得到

$$q_{2i-2j} = q_{2j-2i} = \frac{kh^2}{9\pi} \left\{ \mathcal{H}_0(k) + \frac{9}{h^4} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{H_n(k)}{n^4} \cdot \left( \frac{2}{nh} \sin 2nh - \cos 2nh - 3 \right)^2 \cos 2(i-j)nh \right] \right\}, \tag{28}$$

$$q_{2i-1-2j-1} = q_{2j-1-2i-1} = \frac{8kh^2}{9\pi} \left\{ H_0(k) + \frac{18}{h^4} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{H_n(k)}{n^4} \cdot \left( \frac{1}{nh} \sinh - \cosh \right)^2 \cdot \cos 2(i-j)nh \right] \right\}, \tag{29}$$

$$q_{2i-1-2j} = q_{2j-2i-1} = \frac{4kh^2}{9\pi} \left\{ H_0(k) - \frac{9}{h^4} \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{H_n(k)}{n^4} \cdot \left( \frac{1}{nh} \sinh - \cosh \right) \cdot \left( \frac{2}{nh} \sin 2nh - \cos 2nh - 3 \right) \cdot \cos 2\left( (i-j-1) + \frac{1}{2} \right)nh \right] \right\}, \tag{30}$$

$i, j = 1, 2, \dots, N$ . 这些级数均为收敛级数. 相应地 (7) 的近似解为

$$u^h(r, \theta) = \frac{h}{\pi} \sum_{i=1}^N \left\{ \left[ \frac{2}{3} G_0(kr, k) + \frac{4}{h^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} G_n(kr, k) \cdot \left( \frac{1}{nh} \sinh - \cosh \right) \cdot \cos n(\theta - (2i-1)h) \right] \cdot u_{0-2i-1} + \left[ \frac{1}{3} G_0(kr, k) - \frac{1}{h^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} G_n(kr, k) \cdot \left( \frac{2}{nh} \sin 2nh - \cos 2nh - 3 \right) \cdot \cos n(\theta - 2ih) \right] \cdot u_{0-2i} \right\}, \quad r > 1 \tag{31}$$

4 数值例子

取  $a = 4, b = 1, k = 0.2 + 0.1i$  用  $\sum_{n=0}^M$  代替公式中的  $\sum_{n=0}^{+\infty}$ , 取  $M = 20$  用  $u$  表示真解, 用  $u_h^{(1)}$  表示分段线性元的数值解, 用  $u_h^{(2)}$  表示二次元的数值解.

例 1 取  $g = (x + 2yi) [(x^2 + 4y^2)(\frac{x^2}{16} + y^2)]^{-\frac{1}{2}}$ , 则原问题 (1) - (3) 的真解为

$$u(x, y) = \frac{G_1(k, k) \sqrt{\frac{x^2}{4} + y^2}}{HH_1(k)} \cdot \left( \frac{x}{2} + yi \right) \left( \frac{x^2}{4} + y^2 \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

下面两表分别给出将边界 16 等分、32 等分时分段线性元和二次元的数值结果.

表 1  $M = 20, N = 16$  计算解  $u_h^{(1)}, u_h^{(2)}$  与精确解  $u$  的比较

Table 1 Comparison with exact solution  $u$  and numerical solutions  $u_h^{(1)}, u_h^{(2)}$ , at  $M = 20, N = 16$

$x$	$y$	$u$	线性元		二次元	
			$u_h^{(1)}$	$\left  \frac{(u - u_h^{(1)})}{u} \right $	$u_h^{(2)}$	$\left  \frac{(u - u_h^{(2)})}{u} \right $
4	0	0.4941 + 0.1061i	0.4939 + 0.1060i	5.0233e-004	0.4941 + 0.1061i	1.8551e-006
5.6569	2.8284	0.0655 + 0.2365i	0.0655 + 0.2364i	5.0265e-004	0.0655 + 0.2365i	1.8468e-006
0	8	-0.0984 + 0.0350i	-0.0984 + 0.0350i	5.0265e-004	-0.0984 + 0.0350i	1.8468e-006
-19.7998	1.4112	-0.0080 - 0.0744i	-0.0080 - 0.0743i	5.0265e-004	-0.0080 - 0.0744i	1.8468e-006
-26.1457	-15.1360	0.0055 + 0.0178i	0.0055 + 0.0177i	5.0265e-004	0.0055 + 0.0178i	1.8468e-006

表 2  $M = 20, N = 32$  计算解  $u_h^{(1)}, u_h^{(2)}$  与精确解  $u$  的比较

Table 2 Comparison with exact solution  $u$  and numerical solutions  $u_h^{(1)}, u_h^{(2)}$ , at  $M = 20, N = 32$

$x$	$y$	$u$	线性元		二次元	
			$u_h^{(1)}$	$\left  \frac{(u - u_h^{(1)})}{u} \right $	$u_h^{(2)}$	$\left  \frac{(u - u_h^{(2)})}{u} \right $
4	0	0.4941 + 0.1061i	0.4939 + 0.1061i	2.6330e-015	0.4941 + 0.1061i	8.4325e-013
5.6569	2.8284	0.0655 + 0.2365i	0.0655 + 0.2365i	5.2129e-016	0.0655 + 0.2365i	9.4269e-013
0	8	-0.0984 + 0.0350i	-0.0984 + 0.0350i	6.2655e-016	-0.0984 + 0.0350i	8.6036e-013
-19.7998	1.4112	-0.0080 - 0.0744i	-0.0080 - 0.0744i	2.4963e-015	-0.0080 - 0.0744i	4.2298e-013
-26.1457	-15.1360	0.0055 + 0.0178i	0.0055 + 0.0178i	5.2537e-015	0.0055 + 0.0178i	5.5895e-013

例 2 取  $g = (\frac{x^2}{4} - y^2 + xyi)(\frac{x^2}{4} + y^2)^{-1}(\frac{x^2}{16} + y^2)^{-\frac{1}{2}}$ , 则原问题 (1) - (3) 的真解为

$$u(x,y)=\frac{G_2(k,k)\sqrt{\frac{x^2}{4}+y^2}}{hH_2(k)}\cdot(\frac{x^2}{4}-y^2+xyi)(\frac{x^2}{4}+y^2)^{-1}.$$

下面两表分别给出将边界 16等分、32等分时分段线性元和二次元的数值结果.

表 3  $M = 20, N = 16$  计算解  $u_h^{(1)}, u_h^{(2)}$  与精确解  $u$  的比较

Table 3 Comparison with exact solution  $u$  and numerical solutions  $u_h^{(1)}, u_h^{(2)}$ , at  $M = 20, N = 16$

$x$	$y$	$u$	线性元		二次元	
			$u_h^{(1)}$	$\left \frac{(u-u_h^{(1)})}{u}\right $	$u_h^{(2)}$	$\left \frac{(u-u_h^{(2)})}{u}\right $
4	0	0.1283+0.0054i	0.1277+0.0054i	0.0043	0.1282+0.0054i	5.3375e-005
5.6569	2.8284	-0.0058+0.0335i	-0.0058+0.0333i	0.0043	-0.0058+0.0335i	5.3097e-005
0	8	-0.0075-0.0055i	-0.0074-0.0055i	0.0043	-0.0075-0.0055i	5.3097e-005
-19.7998	1.4112	0.0048+0.0037i	0.0048+0.0036i	0.0043	0.0048+0.0037i	5.3097e-005
-26.1457	-15.1360	-0.0004-0.0012i	-0.0004-0.0012i	0.0043	-0.0004-0.0012i	5.3097e-005

表 4  $M = 20, N = 32$  计算解  $u_h^{(1)}, u_h^{(2)}$  与精确解  $u$  的比较

Table 4 Comparison with exact solution  $u$  and numerical solutions  $u_h^{(1)}, u_h^{(2)}$ , at  $M = 20, N = 32$

$x$	$y$	$u$	线性元		二次元	
			$u_h^{(1)}$	$\left \frac{(u-u_h^{(1)})}{u}\right $	$u_h^{(2)}$	$\left \frac{(u-u_h^{(2)})}{u}\right $
4	0	0.1283+0.0054i	0.1283+0.0054i	2.1353e-015	0.1283+0.0054i	1.1446e-012
5.6569	2.8284	-0.0058+0.0335i	-0.0058+0.0335i	3.7535e-015	-0.0058+0.0335i	2.3797e-012
0	8	-0.0075-0.0055i	-0.0075-0.0055i	6.4407e-015	-0.0075-0.0055i	4.4958e-012
-19.7998	1.4112	0.0048+0.0037i	0.0048+0.0037i	3.4463e-015	0.0048+0.0037i	3.9924e-012
-26.1457	-15.1360	-0.0004-0.0012i	-0.0004-0.0012i	1.3172e-014	-0.0004-0.0012i	3.0337e-012

从上述例子可以看出, 用本文介绍的方法得到了很好的数值结果和较高的精度, 说明该方法是可行且有效的. 但文中边界  $\Gamma = \{(x,y)|\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1\}$  相对来说是特殊的, 对于更一般的椭圆边界  $\alpha x^2+\beta y^2=1$  经过坐标变换后, 原各向异性问题转化成椭圆边界标准 Helmholtz 方程, 由文献 [5] 的结论, 用文中类似的方法同样可求解.

[参考文献]

[1] 邬吉明, 余德浩. 椭圆外区域问题的自然边界元法 [J]. 计算数学, 2000, 22(3): 355-368  
[2] Huang Hongying, Yu Dehao. Natural boundary element method for three dimensional exterior harmonic problem with an inner prolate spheroid boundary [J]. Journal of Computational Mathematics, 2006, 24(2): 193-208.  
[3] 余德浩, 贾祖朋. 椭圆边界上的自然积分算子及各向异性外问题的耦合算法 [J]. 计算数学, 2002, 24(3): 375-384  
[4] Ben-Porat G, Givoli D. Solution of unbounded domain problems using elliptic artificial boundary [J]. Communication in Numerical Methods in Engineering, 1995, 11: 735-741  
[5] 张敏. 椭圆外区域问题的自然边界元法 [D]. 南京: 南京师范大学数学与计算机科学学院, 2007  
[6] 李瑞遐. Helmholtz 方程外边值问题的自然边界元法 [J]. 高校应用数学学报 (A), 1997, 12(3): 369-373.  
[7] Colton D, Kress R. Integral Equation Methods in Scattering Theory [M]. New York: John Wiley & Sons, 1983.  
[8] 余德浩. 自然边界元方法的数学理论 [M]. 北京: 科学出版社, 1993: 1-157.

[责任编辑: 丁 蓉]