一类 p-Ginzburg-Landau型径向极小元的零点分布和渐近性态

聂东明, 雷雨田

(南京师范大学数学与计算机科学学院, 数学研究所, 江苏 南京 210097)

[摘要] 研究了一类与超导相关的 p-Ginzburg-Landau模型, 其中 $p>2$. 给出了这一类泛函的径向极小元的零点分布, 并证明这个极小元的 $W^{1,p}$局部收敛性.

[关键词] p-Ginzburg-Landau, 径向极小元, 零点分布, 渐近性态

[中图分类号] O175.2 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2008)01-0032-06

Location of Zeros and Asymptoic Behavior of a Radial Minimizer of a p-Ginzburg-Landau Type

Nie Dongming, Lei Yutian

(Institute of Mathematics, School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

Abstract In this paper, we are concerned with a p-Ginzburg-Landau type function in the case of $p>2$, and the location of the zeros of radial minimizer is discussed. Moreover, the $W_{loc}^{1,p}$ convergence of the radial minimizer is proved.

Key words p-Ginzburg-Landau, radial minimizer, location of the zeros, asymptoic behavior

设 $B=\{x\in\mathbf{R}^2;\ |x|\leqslant 1\}$. 考虑 p-Ginzburg-Landau泛函

$$E_\varepsilon(u,B)=\frac{1}{p}\int_B|\nabla u|^p\,dx+\frac{1}{4\varepsilon^p}\int_B(\beta^2(r)-|u|^2)^2\,dx \tag{1}$$

在空间 $H=\{u(x)=f(r)\frac{x}{|x|}\in W^{1,p}(B,\mathbf{R}^2)\}$ 中的极小元 u_ε, 其中 $\beta(r)\in C^\infty([0,1],\mathbf{R})$; $p>2$. 由变分直接方法容易知道, $E_\varepsilon(u,B)$ 的极小元 u_ε 在 H 中存在, 我们称 u_ε 为径向极小元. 我们考察当 $\varepsilon\to 0$ 时, u_ε 的零点分布及渐近性态. 泛函(1)与具热噪音的超导模型密切相关. 在超导理论中, u_ε 叫序参数, u_ε 的零点叫涡旋. 在 Ⅱ型超导体中, u_ε 的零点表示在这一点退化成普通导体. 所以零点分布的研究在数学和物理上, 特别是超导元件的设计上都有十分重要的意义.

当 $\beta(r)\equiv 1$, $p=2$时, 最初的研究是属于 Bethuel-Brezis-Helein的, 在文献[1, 2]中有详细的研究. 在文献[3~5]中, 作者讨论了 $p\neq 2$的情形.

对应于 $\beta(r)\neq 1$的相关问题, 是 Lin F H于 1995年 6月在苏州大学召开的国际会议上提出来的. 当 $p=2$时, 文[6, 7]做了很好的研究, 其中文[7]用文[8]的方法给出了极小元的零点分布及渐近性态. 当 $p>2$时, 本文利用[3]的思想, 对其径向极小元 u_ε 的零点分布及渐近性态进行讨论, 此时, 我们假定在(1)中, $\beta(r)\neq$常数, $0<m\leqslant\beta(r)\leqslant M$, $r\in[0,1]$.

定理 1 设 u_ε 为 $E_\varepsilon(u,B)$ 的径向极小元, $p>2$. 那么, 当 ε充分小时, 有 $Z_\varepsilon:=\{x\in B;\ |u_\varepsilon(x)|<\frac{m}{2}\}\subset B(0,h\varepsilon)$. 其中 h 是和 ε无关的常数.

由定理 1可以知道 u_ε 的零点均包含在 $B(0,h\varepsilon)$ 中.

收稿日期: 2007-05-28

基金项目: 江苏省高校自然科学基金(06KJB110056)资助项目.

作者简介: 聂东明(1981—), 女, 硕士研究生, 研究方向: 偏微分方程. E-mail: dongming601@163.com

通讯联系人: 雷雨田(1971—), 博士, 副教授, 研究方向: 偏微分方程. E-mail: lythxl@163.com

定理 2 设 u_ε 为 $E_\varepsilon(u, B)$ 的径向极小元, 则当 $\varepsilon \to 0$ 时,

$$u_\varepsilon(x) \to \beta(r)\frac{x}{|x|}, \text{ 于 } W^{1,p}_{loc}(B\setminus\{0\}, \mathbf{R}^2) \text{ 中}. \tag{2}$$

下面我们来证明这两个定理.

1 几个引理

记 $V = \{f \in W^{1,p}_{loc}(0, 1), r^{\frac{1-p}{p}} f \in L^p(0, 1), f(1) = \beta(1)\}$, 则 $V = \{f(r): u(x) = f(r)\frac{x}{|x|} \in H\}$.

首先不难证明:

引理 1 集合 V 是 $\{f \in C[0, 1]; f(0) = 0\}$ 的子集.

引理 2 $E_\varepsilon(u, B)$ 的极小元 u_ε 满足

$$\int_B |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla \phi \, dx - \frac{1}{\varepsilon^p}\int_B u\phi(\beta^2 - |u|^2)\, dx = 0, \tag{3}$$

对任意的 $\phi = f(r)\frac{x}{|x|} \in W^{1,p}_0(B, \mathbf{R}^2)$, 且 $|u_\varepsilon| \leqslant M$.

证明 由变分法可得, 对任意的 $\phi = f(r)\frac{x}{|x|} \in W^{1,p}_0(B, \mathbf{R}^2)$, 有 (3) 式成立. 在 (3) 中取 $\phi = u(|u|^2 - M^2)_+$, 其中 $(|u|^2 - M^2)_+ = \min\{k, \max((|u|^2 - M^2)_+, 0)\}$, $k > 0$, 则可得到

$$\int_B |\nabla u|^p (|u|^2 - M^2)_+ \, dx + 2\int_B |\nabla u|^{p-2}(u\nabla u)^2 dx$$
$$+ \frac{1}{\varepsilon^p}\int_B u^2(|u|^2 - M^2)_+ (M^2 - \beta^2)\, dx + \frac{1}{\varepsilon^p}\int_B u^2(|u|^2 - M^2)_+^2 \, dx = 0$$

由于 $\beta^2 \leqslant M^2$, 因而各项积分均为非负值. 于是,

$$\frac{1}{\varepsilon^p}\int_B u^2(|u|^2 - M^2)_+^2 \, dx = 0$$

由于 u 是连续的, 则 $|u| = 0$ 或 $(|u|^2 - M^2)_+ = 0$, 这表明 $|u| \leqslant M$, $x \in B$.

引理 3 存在一个不依赖于 $\varepsilon \in (0, 1)$ 的正常数 C 使得

$$E_\varepsilon(u, B) \leqslant C\varepsilon^{2-p}. \tag{4}$$

证明 定义

$$u^* = \begin{cases} \beta(r)\dfrac{x}{|x|}, & r \in [\varepsilon, 1], \\ \beta(r) f_1(r)\dfrac{x}{|x|} = \beta(s\varepsilon) f_1(s\varepsilon)\dfrac{x}{|x|}, & r \in [0, \varepsilon]. \end{cases}$$

其中 $f_1(s)\frac{y}{|y|}$ 是泛函

$$F(u, B) = \frac{1}{p}\int_B |\nabla(\beta u)|^p dy + \frac{1}{4}\int_B \beta^4(1 - |u|^2)^2 dy$$

在空间 $W = \{f(s)\frac{y}{|y|} \in W^{1,p}(B, \mathbf{R}^2), f(1) = 1, s = |y|\}$ 中的极小元. 令 $y = \varepsilon^{-1}x$. 则

$$E_\varepsilon(u^*, B(0, \varepsilon)) = \frac{1}{p}\int_{B(0,\varepsilon)} |\nabla \beta(r) f_1(r)\frac{x}{|x|}|^p dx + \frac{1}{4\varepsilon^p}\int_{B(0,\varepsilon)} \beta^4(r)(1 - |f_1(r)|^2)^2 dx =$$
$$\varepsilon^{2-p} F(f_1(s)\frac{y}{|y|}, B)\, dy \leqslant C\varepsilon^{2-p}.$$

同时还有

$$E_\varepsilon(u^*, B\setminus B(0, \varepsilon)) = \frac{1}{p}\int_{B\setminus B(0,\varepsilon)} |\nabla \beta(r)\frac{x}{|x|}|^p dx + \frac{1}{4\varepsilon^p}\int_{B\setminus B(0,\varepsilon)} (\beta^2 - \beta^2)^2 dx =$$
$$\frac{2\pi}{p}\int_\varepsilon^1 (\beta_r^2 + \frac{\beta^2}{r^2})^{\frac{p}{2}} r dr \leqslant C\int_\varepsilon^1 \frac{1}{r^{p-1}} dr \leqslant C\varepsilon^{2-p}.$$

注意到 u_ε 是极小元, 我们利用上面的估计可得,

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon,B)\leqslant E_\varepsilon(u^*,B)\leqslant E_\varepsilon(u^*,B(0,\varepsilon))+E_\varepsilon(u^*,B\setminus B(0,\varepsilon))\leqslant C\varepsilon^{2-p}.$$

引理得证.

注　(4)包含着

$$\frac{1}{\varepsilon^p}\int_B(\beta^2(r)-|u|^2)^2\mathrm{d}x\leqslant C\varepsilon^{2-p},$$

两端同乘以 ε^{p-2} 后得到

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_B(\beta^2(r)-|u|^2)^2\mathrm{d}x\leqslant C. \tag{5}$$

2　定理1的证明

命题1　设 u_ε 为 $E_\varepsilon(u,B)$ 的极小元,那么存在不依赖于 ε 的正常数 λ,μ 使得若

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{B\cap B^{2l\varepsilon}}(\beta^2-|u_\varepsilon|^2)^2\mathrm{d}x\leqslant\mu, \tag{6}$$

其中 $B^{2l\varepsilon}$ 为一半径为 $2l\varepsilon$ 的圆盘, $l\geqslant\lambda$,则有

$$|u_\varepsilon|\geqslant\frac{m}{2},\quad\forall x\in B\cap B^{l\varepsilon}. \tag{7}$$

证明　易知对任意的 $x\in B$,存在一个常数 $\alpha>0$,使得 $|B\cap B(x,r)|\geqslant\alpha r^2$, $0<r\leqslant1$. 又由 $|u_\varepsilon|\leqslant M$, $E_\varepsilon(u_\varepsilon,B)\leqslant C\varepsilon^{2-p}$ 可得 $\|u_\varepsilon\|_{W^{1,p}(B,\mathbf{R}^2)}\leqslant C\varepsilon^{(2-p)/p}$. 由嵌入定理可知存在不依赖于 ε 的正常数 C,对任意 $x,x_0\in B$,有

$$|u_\varepsilon(x)-u_\varepsilon(x_0)|\leqslant C\varepsilon^{(2-p)/p}|x-x_0|^{1-2/p}.$$

我们选取

$$\lambda=\left(\frac{m}{4C}\right)^{p/(p-2)},\quad\mu=\frac{49}{256}\alpha m^4\lambda^2.$$

(反证)若存在点 $x_0\in B\cap B^{l\varepsilon}$,使得 $|u_\varepsilon(x_0)|<\frac{m}{2}$,则对 $\forall x\in B(x_0,\lambda\varepsilon)$,有

$$|u_\varepsilon(x)-u_\varepsilon(x_0)|\leqslant C\varepsilon^{(2-p)/p}|x-x_0|^{1-2/p}\leqslant C\varepsilon^{(2-p)/p}(\lambda\varepsilon)^{(p-2)/p}=\frac{m}{4}.$$

因此

$$|u_\varepsilon(x)|\leqslant|u_\varepsilon(x_0)|+\frac{m}{4}<\frac{3m}{4}.$$

注意到 $\beta(r)\geqslant m$,我们有

$$|\beta^2(r)-u_\varepsilon^2(x)|^2>|\beta^2(r)-\frac{9m^2}{16}|^2\geqslant(m^2-\frac{9m^2}{16})^2=\frac{49m^4}{256}.$$

于是

$$\int_{B(x_0,\lambda\varepsilon)\cap B}(\beta^2-|u_\varepsilon|^2)^2>\frac{49m^4}{256}\alpha\lambda^2\varepsilon^2=\mu\varepsilon^2. \tag{8}$$

又因 $(B(x_0,\lambda\varepsilon)\cap B)\subset(B^{2l\varepsilon}\cap B)$,上式表明 $\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{B^{2l\varepsilon}\cap B}(\beta^2-|u_\varepsilon|^2)^2\mathrm{d}x>\mu$. 这与(6)矛盾,命题得证.

定义　设 u_ε 为 $E_\varepsilon(u,B)$ 的径向极小元, λ,μ 是上述命题中的常数. 若

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{B(x^\varepsilon,2\lambda\varepsilon)\cap B}(\beta^2-|u_\varepsilon|^2)^2\mathrm{d}x\leqslant\mu,$$

则 $B(x^\varepsilon,\lambda\varepsilon)$ 称为好的圆盘,否则 $B(x^\varepsilon,\lambda\varepsilon)$ 称为坏的圆盘. 现在设 $\{B(x_i^\varepsilon,\lambda\varepsilon),i\in I\}$ 为一组圆盘,满足

(i) $x_i^\varepsilon\in B$, $i\in I$;

(ii) $B\subset\bigcup_{i\in I}B(x_i^\varepsilon,\lambda\varepsilon)$;

(iii) $B(x_i^\varepsilon,\lambda\varepsilon/4)\cap B(x_j^\varepsilon,\lambda\varepsilon/4)=\varnothing$, $i\neq j$. (9)

命题2　记 $J_\varepsilon=\{i\in I,B(x_i^\varepsilon,\lambda\varepsilon)$ 是坏圆盘$\}$,则存在一个与 ε 无关的正整数 N_0,使得坏圆盘个数

$$\mathrm{Card}\, J_\varepsilon \leqslant N_0.$$

证明　由 (9) 可知 B 中的每一点均可以被有限个 (设为 m 个) 圆盘所覆盖. 根据坏圆盘的定义及 (5),

$$\mu\varepsilon^2 \mathrm{Card}\, J_\varepsilon \leqslant \sum_{i\in J_\varepsilon} \int_{B(x_i^\varepsilon, 2\lambda\varepsilon)\cap B} (\beta^2 - |u_\varepsilon|^2)^2 \mathrm{d}x \leqslant m \int_B (\beta^2 - |u_\varepsilon|^2)^2 \mathrm{d}x \leqslant mC\varepsilon^2.$$

则

$$\mathrm{Card}\, J_\varepsilon \leqslant \frac{mC}{\mu} \leqslant N_0.$$

即坏圆盘的个数为有限个.

由命题 2, 运用 [1] 中的定理 1.1, 我们可以调整这组坏圆盘使之成为一组新的, 记为 $\{B(x_i^\varepsilon, h\varepsilon);\ i\in J\}$, 且满足

$$\bigcup_{i\in J_\varepsilon} B(x_i^\varepsilon, \lambda\varepsilon) \subset \bigcup_{i\in J} B(x_i^\varepsilon, h\varepsilon),\ \lambda \leqslant h,\quad \mathrm{Card}\, J \leqslant \mathrm{Card}\, J_\varepsilon,$$

$$|x_i^\varepsilon - x_j^\varepsilon| > 8h\varepsilon,\quad i \neq j,\quad i, j \in J.$$

后一条件表明新一族坏圆盘两两不相交.

下面我们证明定理 1.

我们用反证法. 假设 Z_ε 中存在一点 $x_0 \notin B(0, h\varepsilon)$, 则圆周 $S_0 = \{x \in B, |x| = |x_0|\}$ 上的点 x 均满足 $|u_\varepsilon(x)| < \frac{m}{2}$. 于是, 由命题 1可以看到 S_0 上的所有点均包含在坏圆盘内, 另一方面, 由于 $|x_0| > h\varepsilon$, 所以 S_0 被至少两个互不相交的坏圆盘所覆盖. 这是不可能的. 定理 1得证.

3　定理 2的证明

记　$E_\varepsilon(f; [a, b]) = \frac{1}{p}\int_a^b (f_r^2 + \frac{f^2}{r^2})^{p/2} r\mathrm{d}r + \frac{1}{4\varepsilon^p}\int_a^b (\beta^2 - f^2)^2 r\mathrm{d}r.$

命题 3　对任意给定的 $T \in (0, \frac{1}{2})$, 存在常数 T_j, 满足 $0 \leqslant T_j \leqslant T_{j+1} \leqslant T$, 常数 $C > 0$, 使得

$$E_\varepsilon(f_\varepsilon; [T_j, 1]) \leqslant C\varepsilon^{j-p}, \tag{10}$$

其中 $j = 2, 3, \cdots, N$, $N = [p]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, ε_0 充分小.

证明　若 $j = 2$, 由引理 3的证明可知 (10) 式成立. 设 (10) 式对所有的 $j \leqslant m$ 均成立, (不妨设 $m < N$, 否则已证.) 特别地, 有

$$E_\varepsilon(f_\varepsilon; [T_m, 1]) \leqslant C\varepsilon^{m-p}. \tag{11}$$

由 (11) 及中值定理可知存在 $T_{m+1} \in [T_m, 1]$ 使得

$$\frac{1}{\varepsilon^2}(\beta^2 - f^2)^2 |_{r = T_{m+1}} \leqslant CE_\varepsilon(u_\varepsilon, \partial B(0, T_{m+1})) \leqslant C\varepsilon^{m-p}. \tag{12}$$

考虑下面的泛函

$$E(\rho, [T_{m+1}, 1]) = \frac{1}{p}\int_{T_{m+1}}^1 (\rho_r^2 + 1)^{p/2} \mathrm{d}r + \frac{1}{2\varepsilon^p}\int_{T_{m+1}}^1 (1 - \rho)^2 \mathrm{d}r,$$

易证 $E(\rho, [T_{m+1}, 1])$ 在 $W^{1,p}_{\frac{f_\varepsilon}{\beta}}([T_{m+1}, 1], \mathbf{R}^+)$ 中的极小元存在, 以下记为 ρ, 它满足

$$-(v^{(p-2)/2}\rho_r)_r = \frac{1}{\varepsilon^p}(1 - \rho),\quad r \in [T_{m+1}, 1], \tag{13}$$

$$\rho(T_{m+1}) = f_\varepsilon(T_{m+1})/\beta(T_{m+1}),\ \rho(1) = f_\varepsilon(1)/\beta(1) = 1, \tag{14}$$

其中 $v = \rho_r^2 + 1$. 因为 $\frac{m}{2} \leqslant |f_\varepsilon| \leqslant M$, $0 < m \leqslant \beta(r) \leqslant M$, 利用极大值原理不难得到 $\rho \leqslant \frac{M}{m}$. 注意到 ρ 为极小元, 从 (11) 可以得到

$$E(\rho, [T_{m+1}, 1]) \leqslant E(\frac{f_\varepsilon}{\beta}; [T_{m+1}, 1]) \leqslant CE_\varepsilon(f_\varepsilon; [T_{m+1}, 1]) \leqslant C\varepsilon^{m-p}. \tag{15}$$

类似于 [3] 中 (4.11) 的证明, 我们也可推出

$$E(\rho, [T_{m+1}, 1]) \leqslant C\varepsilon^{m-p+1}. \tag{16}$$

定义

$$W_\varepsilon = f_\varepsilon,\ r\in[0,T_{m+1}];\quad W_\varepsilon=\beta\rho,\ r\in[T_{m+1},1].$$

由于 u_ε 为 $E_\varepsilon(u,B)$ 的极小元,我们有 $E_\varepsilon(u,B)\leqslant E_\varepsilon(W_\varepsilon\frac{x}{|x|},B)$,因此

$$E_\varepsilon(f_\varepsilon,[T_{m+1},1])\leqslant\frac{1}{p}\int_{T_{m+1}}^1[(\beta\rho)_r^2+\frac{(\beta\rho)^2}{r^2}]^{p/2}r\mathrm{d}r+\frac{1}{4\varepsilon^p}\int_{T_{m+1}}^1[\beta^2-(\beta\rho)^2]^2r\mathrm{d}r\leqslant$$

$$\frac{1}{p}\int_{T_{m+1}}^1[2\beta^2\rho_r^2+(2\beta_r^2+\frac{\beta^2}{r^2})\rho^2]^{p/2}r\mathrm{d}r+\frac{1}{4\varepsilon^p}\int_{T_{m+1}}^1\beta^4(1+\rho)^2(1-\rho)^2r\mathrm{d}r.$$

由于 $0<m\leqslant\beta(r)\leqslant M$,$(\beta_r^2+\frac{\beta^2}{r^2})\rho^2$,$\beta^4(1+\rho)^2$ 有界,所以

$$E_\varepsilon(f_\varepsilon;[T_{m+1},1])\leqslant C[\frac{1}{p}\int_{T_{m+1}}^1(\rho_r^2+1)^{p/2}\mathrm{d}r+\frac{1}{2\varepsilon^p}\int_{T_{m+1}}^1(1-\rho)^2\mathrm{d}r]\leqslant C\varepsilon^{m-p+1}.\tag{17}$$

(17)式表明当 $j=m+1$ 时,(10)式仍成立.命题得证.

命题 4　对任意给定的 $T\in(0,1/2)$,存在一个常数 $T_{N+1}\in(0,T)$ 和 $C>0$ 使得

$$E_\varepsilon(f_\varepsilon;[T_{N+1},1])\leqslant\frac{1}{p}\int_{T_{N+1}}^1[(\beta_r^2+\frac{\beta^2}{r^2})\rho^2]^{p/2}r\mathrm{d}r+C\varepsilon^{(N+1-p)/2}.$$

证明　由命题3我们可得 $E_\varepsilon(f_\varepsilon;[T_N,1])\leqslant C\varepsilon^{N-p}$,于是,利用积分中值定理可知:存在 $T_{N+1}\in(T_N,T)$ 使得

$$\int_{\partial B(0,T_{N+1})}[\frac{1}{p}|\nabla u_\varepsilon|^p+\frac{1}{4\varepsilon^p}(\beta^2-|u|^2)^2]\mathrm{d}x\leqslant C\varepsilon^{N-p}.$$

设 ρ_ε 为下面泛函在函数类 $W^{1,p}_{\frac{1}{\beta}}([T_{N+1},1],\mathbf{R}^+)$ 中的极小元,

$$E(\rho,[T_{N+1},1])=\frac{1}{p}\int_{T_{N+1}}^1(\rho_r^2+1)^{p/2}\mathrm{d}r+\frac{1}{2\varepsilon^p}\int_{T_{N+1}}^1(1-\rho^2)^2\mathrm{d}r.$$

由极大值原理可得 $\rho_\varepsilon\leqslant\frac{M}{m}$.以下记 $\rho=\rho_\varepsilon$.与[3]中(4.11)的证明类似,我们仍然有

$$\int_{T_{N+1}}^1(\rho_r^2+1)^{(p-2)/2}\rho_r^2\mathrm{d}r+\frac{1}{\varepsilon^p}\int_{T_{N+1}}^1(\rho^2-1)^2\mathrm{d}r\leqslant C\varepsilon^{N-p+1}.\tag{18}$$

由(18)式不难看出

$$\int_{T_{N+1}}^1|\rho_r|^p\mathrm{d}r\leqslant C\varepsilon^{N-p+1},\quad\int_{T_{N+1}}^1(\rho_r)^2\mathrm{d}r\leqslant C\varepsilon^{N-p+1},\quad\frac{1}{\varepsilon^p}\int_{T_{N+1}}^1(\rho^2-1)^2\mathrm{d}r\leqslant C\varepsilon^{N-p+1}.$$

定义

$$W_\varepsilon=f_\varepsilon,\ r\in[0,T_{N+1}];\quad W_\varepsilon=\beta\rho,\ r\in[T_{N+1},1].$$

由于 u_ε 为 $E_\varepsilon(u,B)$ 的极小元,我们有

$$E_\varepsilon(f_\varepsilon,[T_{N+1},1])\leqslant\frac{1}{p}\int_{T_{N+1}}^1[(\beta\rho)_r^2+\frac{(\beta\rho)^2}{r^2}]^{p/2}r\mathrm{d}r+\frac{1}{4\varepsilon^p}\int_{T_{N+1}}^1[\beta^2-(\beta\rho)^2]^2r\mathrm{d}r.$$

注意到

$$\frac{1}{p}\int_{T_{N+1}}^1[(\beta\rho)_r^2+\frac{(\beta\rho)^2}{r^2}]^{p/2}r\mathrm{d}r-\frac{1}{p}\int_{T_{N+1}}^1[(\beta_r^2+\frac{\beta^2}{r^2})\rho^2]^{p/2}r\mathrm{d}r=$$

$$\frac{1}{2}\int_{T_{N+1}}^1\int_0^1\{\Theta[(\beta\rho)_r^2+\frac{(\beta\rho)^2}{r^2}]+(1-\Theta)[(\beta_r^2+\frac{\beta^2}{r^2})\rho^2]\}^{(p-2)/2}(2\beta\beta_r\rho\rho_r+\beta^2\rho_r^2)\mathrm{d}\Theta\ r\mathrm{d}r\leqslant$$

$$C\int_{T_{N+1}}^1(|\rho_r|^{p-1}+|\rho_r|)\mathrm{d}r+C\int_{T_{N+1}}^1(\rho_r^2+1)^{(p-2)/2}\rho_r^2\mathrm{d}r\leqslant$$

$$C(\int_{T_{N+1}}^1|\rho_r|^p)^{(p-1)/p}\mathrm{d}r+C(\int_{T_{N+1}}^1|\rho_r|^2)^{1/2}\mathrm{d}r+C\varepsilon^{N-p+1}\leqslant$$

$$C\varepsilon^{\frac{(N+1-p)(p-1)}{p}}+C\varepsilon^{\frac{N+1-p}{2}}+C\varepsilon^{N+1-p}\leqslant C\varepsilon^{\frac{N+1-p}{2}}.$$

我们可以推出

$$E_\varepsilon(f_\varepsilon;[T_{N+1},1])\leqslant\frac{1}{p}\int_{T_{N+1}}^1[(\beta_r^2+\frac{\beta^2}{r^2})\rho^2]^{p/2}r\mathrm{d}r+C\varepsilon^{(N+1-p)/2}.$$

命题得证.

下面证明定理 2

定理 **3** 设 $u_\varepsilon = f_\varepsilon(r)\frac{x}{|x|}$ 是 $E_\varepsilon(u, B)$ 的径向极小元,则对任意的紧子集 $K \subset B\setminus\{0\}$ 有

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon = \beta(r)\frac{x}{|x|},\quad u_\varepsilon \in W^{1,p}_{loc}(B\setminus\{0\}, \mathbf{R}^2).$$

证明 不失一般性我们可设 $K = \overline{B(0,1)\setminus B(0,T_{N+1})}$,由命题 4可知

$$E_\varepsilon(u_\varepsilon, K) = 2\pi E_\varepsilon(f_\varepsilon, [T_{N+1}, 1]) \leqslant C,$$

其中 C 是与 ε 无关的常数. 结合 $|u_\varepsilon|\leqslant M$ 便有 $\|u_\varepsilon\|_{W^{1,p}(K,\mathbf{R}^2)} \leqslant C$. 于是,紧嵌入定理表明:存在 $\{u_\varepsilon\}$ 的一个子列 $\{u_{\varepsilon_k}\}$ 和函数 $u_* \in W^{1,p}(K, \mathbf{R}^2)$ 使得

$$\lim_{\varepsilon_k\to 0} u_{\varepsilon_k} = u_*,\ 在\ W^{1,p}(K, \mathbf{R}^2)\ 弱收敛; \tag{19}$$

$$\lim_{\varepsilon_k\to 0} u_{\varepsilon_k} = u_*,\ 在\ C(K, \mathbf{R}^2)\ 中收敛. \tag{20}$$

而 $\frac{1}{\varepsilon^2}\int_K(\beta^2 - |u_\varepsilon|^2)^2 dr \leqslant C$ 表明 $|u_*| = \beta$ a. e. $x\in K$. 因此, $u_* = \beta(r)\frac{x}{|x|}$. 由于 $\{u_\varepsilon\}$ 的任何子列均有一个收敛子列,且其极限均为 $\beta(r)\frac{x}{|x|}$,那么 (19) 和 (20) 式不仅对子列成立,而且对 $\{u_\varepsilon\}$ 也成立. 利用 $\int_K|\nabla u_\varepsilon|^p$ 的弱下半连续性以及命题 4可知

$$\int_K\left|\nabla\beta(r)\frac{x}{|x|}\right|^p dx \leqslant \underline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\int_K|\nabla u_\varepsilon|^p dx \leqslant \overline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\int_K|\nabla u_\varepsilon|^p dx \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0}2\pi\int_{T_{N+1}}^1\left[\left(\beta_r^2 + \frac{\beta^2}{r^2}\right)\rho_\varepsilon^2\right]^{p/2} r dr + \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{\frac{N+1-p}{2}}. \tag{21}$$

又注意到 (18) 蕴含着

$$\left|\int_{T_{N+1}}^1\left[\left(\beta_r^2 + \frac{\beta^2}{r^2}\right)\rho_\varepsilon^2\right]^{p/2} r dr - \int_{T_{N+1}}^1\left[\left(\beta_r^2 + \frac{\beta^2}{r^2}\right)\right]^{p/2} r dr\right| \leqslant C\int_{T_{N+1}}^1|\rho_\varepsilon - 1| dr \leqslant C\varepsilon^{\frac{N+1}{2}},$$

则 (21) 表明

$$\int_K\left|\nabla\beta(r)\frac{x}{|x|}\right|^p dx \leqslant \lim_{\varepsilon\to 0}\int_K|\nabla u_\varepsilon|^p dx \leqslant 2\pi\int_{T_{N+1}}^1\left[\left(\beta_r^2 + \frac{\beta^2}{r^2}\right)\right]^{p/2} r dr = \int_K\left|\nabla\beta(r)\frac{x}{|x|}\right|^p dx.$$

这意味着

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_K|\nabla u_\varepsilon|^p dx = \int_K\left|\nabla\beta(r)\frac{x}{|x|}\right|^p dx.$$

以此结合 (19) 和 (20),我们最终得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon = \beta(r)\frac{x}{|x|},\quad u_\varepsilon \in W^{1,p}_{loc}(B\setminus\{0\}, \mathbf{R}^2).$$

定理得证.

[参考文献]

[1] Bethuel F, Brezis H, Helein F. Ginzburg-Landau Vortices[M]. Berlin: Birkauser, 1994.

[2] Bethuel F, Brezis H, Helein H. Asymptoics for the Ginzburg-Landau functional[J]. Calc Var PDF, 1993, 1(3): 123-148

[3] Lei Yutian. Radial minimizer of p-Ginzburg-Landau functional with nonvalishing Dirichlet bounday condition[J]. Nonlinear Analysis, 2005, 60: 117-128.

[4] Lei Yutian. Remarks on the minimizer of a Ginzburg-Landau type[J]. Bull Korean Math Soc, 2005, 42(3): 509-520.

[5] 雷雨田. 具变系数的 Ginzburg-Landau泛函径向极小元[J]. 南京师大学报:自然科学版, 2004, 27(3): 1-6.

[6] Lassoued L. Asymptoics for a Ginzburg-Landau model with pinning[J]. Nonlinear Anal, 1997, 4: 27-58.

[7] 丁时进, 刘祖汉. 一类 Ginzburg-Landau泛函的渐近性态[J]. 数学年刊, 1997, 18A(4): 437-444

[8] Ding S, Liu Z, Yu W. Pinning of vortices for the Ginzburg-Landau function with variable coefficient[J]. 高校应用数学学报, 1997, 12B(1): 77-88.

[责任编辑:丁 蓉]