# 解非线性规划的一个可微“准”精确罚函数法

葛亚平[1], 王建宏[2], 颜世建[3]

(1. 紫琅职业技术学院基础部, 江苏 南通 226002)
(2. 南通大学理学院, 江苏 南通 226007)
(3. 南京师范大学数学与计算机科学学院, 江苏 南京 210097)

[摘要] 将文[1]中“+”函数的光滑近似函数应用于求解非线性规划问题, 该方法通过解一个可微“准”精确罚函数逐渐去逼近原问题的最优解, 并且可以通过参数的选取控制解的误差, 给出了几个演示性算例. 该算法克服了非线性规划极大熵函数法易溢出的缺陷.

[关键词] 非线性规划, 光滑近似函数, 收敛性
[中图分类号] O221. 2　[文献标识码] A　[文章编号] 1001-4616(2008)01-0038-04

# A Differentiable and “Almost” Exact Penalty Function Method for Nonlinear Programming

Ge Yaping[1], Wang Jianhong[2], Yan Shijian[3]

(1. Department of Basic Education, Zilang Vocational Technical College, Nantong 226002, China)
(2. School of Science, Nantong University, Nantong 226007, China)
(3. School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

**Abstract**: An efficient algorithm for solving nonlinear programming is presented by applying the smooth approximating function. The algorithm is based on a differentiable and “almost” exact penalty function and a successive approximation technique. The solution error of subproblems can be controlled by selecting suitable parameters. Some faults of the maximum entropy function method for solving nonlinear programming, for example easy over flow, can be overcome by using this method.

**Key words**: nonlinear programming, smooth approximating function, convergence

为简化表达, 本文考虑如下不等式约束问题的非线性规划问题 $(P)$

$$s.t.\quad \min_x f(x), \tag{1}$$

$$g_i(x) \leqslant 0,\quad i = 1, 2, \cdots, m. \tag{2}$$

其中 $f(x)$ 与 $g_i(x)$ 均为 $x$ 的连续可微函数. 用两个不等式代替一个等式, 即可把本文方法推广到含等式约束的非线性规划问题.

文[1]对非线性规划提出了一个修正凝聚函数法, 文[2]针对非线性 $l_1$ 问题在文[3]的基础上构造了“+”函数的光滑近似函数, 而本文给出的“准”精确惩罚函数既可微又不含导数, 其基本思想是用文[1]中“+”函数的光滑近似函数去逼近不可微精确罚函数. 它在算法实现上克服了文[4]非线性规划极大熵函数法易溢出的缺陷.

就不等式约束问题 $(P)$ 取 $L_1$ 精确罚函数, 令

$$g_i^+(x) = \max(0, g_i(x)),\quad i = 1, 2, \cdots, m,$$

则

收稿日期: 2007-09-28
基金项目: 南通大学自然科学基金(07Z002)资助项目.

作者简介: 葛亚平(1981—), 女, 助教, 研究方向: 优化理论. E-mail: gyp19819023@163.com
通讯联系人: 颜世建(1946—), 教授, 研究方向: 计算数学.

$$P(x, b) = f(x) + b\|g^+(x)\|_1 = f(x) + b\sum_{i=1}^{m}\max(0, g_i(x)), \tag{3}$$

其中 $b > 0$是惩罚因子. 利用这个精确罚函数就得到一个无约束的非线性规划问题 $(P_1)$

$$\min_x P(x, b). \tag{4}$$

Fletcher曾证明, 当罚因子 $b > \|\lambda^*\|_\infty$ ($\lambda^*$ 是 $x^*$ 处相应的 Lagrange乘子), $g^+(x^*) = 0$, $P(x, b)$ 的无约束极小点 $x^*$ 就是原问题的极小点. 但由于 $\max(0, g_i(x))$ 在某些点是不可微的, 这就给求解问题带来了困难, 为解决这个问题, 我们利用文[2] 中的“+”函数的光滑近似构造如下函数:

$$\phi(x, a, b) = f(x) + b\sum_{i=1}^{m}N(g_i(x), a) \quad b, a > 0 \tag{5}$$

其中

$$N(y, a) = \begin{cases} 0, & y \leqslant -1/a, \\ a(y + 1/a)^2/4, & -1/a \leqslant y \leqslant 1/a, \\ y, & y \geqslant 1/a. \end{cases} \tag{6}$$

由此, 我们得到无约束非线性规划问题 $(P_2)$

$$\min_x \phi(x, a, b). \tag{7}$$

$(P_2)$是一个可微函数的无约束优化问题, 当 $a \to \infty$时, $(P_2)$逼近 $(P_1)$, 通过求解 $(P_2)$就可以得到问题 $(P_1)$ 的近似解. 实例表明, 只要 $a$和 $b$ 足够大, 一次无约束计算就能得到很高的精度. 严格地说函数 $\phi(x, a, b)$仅在 $a \to \infty$时才是一个精确的罚函数. 若 $a$取有限值, 它则不再是精确罚函数. 故本文将其称为“准”精确罚函数. 与精确罚函数 $P(x, b)$ 之差可按下式估计

$$0 \leqslant \phi(x, a, b) - P(x, b) \leqslant bm/4a. \tag{8}$$

## 1 算法

**算法 1**

①令 $b > 0$为较大的常数, 赋初值 $a_0 > 0$, $l > 1$, $x_0$, $\varepsilon$, 令 $k = 1$.

②利用 $x_{k-1}$ 求解 $\min_{x \in \mathbf{R}^n}\phi(x, a_{k-1}, b)$ 得到最优解 $x_k$.

③若 $\|x_k - x_{k-1}\| \leqslant \varepsilon$则停. 否则转 ④.

④$a_{k+1} = la_k$, $k = k + 1$转 ②.

## 2 收敛性分析

对算法 1做以下收敛性分析:

**假设 1** 令 $L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x)$, 存在 $x$, $\lambda \geqslant 0$使 $L(x, \lambda) \leqslant L(x, \lambda) \leqslant L(x, \lambda)$, $\forall x$, $\forall \lambda \geqslant 0$且 $b > \max_{1 \leqslant i \leqslant m}\{\lambda_i\}$.

**定理 1**[1] $\max(0, g_i(x)) \leqslant N(g_i(x), a) \leqslant \max(0, g_i(x)) + 1/4a$.

**定理 2** 设假设 1满足, 对 $\forall a > 0$, 设 $x_a$ 是问题 $(P_2)$ 的最优解, $x^*$ 是 $\{x_a\}$当 $a \to \infty$时的任何聚点, 则 $x^*$ 是问题 $(P)$ 的最优解.

证 设 $\hat{x}$是问题 $(P_1)$ 的最优解, $\{x_k\}$ 是 $\{x_{a_k}\}$ 的子列, $\{a_k\}$ 是相应的参数序列, 满足

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x^*,$$

$$\lim_{k \to \infty} a_k = +\infty.$$

由定理 1得

$$P(x, b) = f(x) + b\sum_{i=1}^{m}\max(0, g_i(x)) \leqslant f(x) + b\sum_{i=1}^{m}N(g_i(x), a) \leqslant f(x) + b\sum_{i=1}^{m}[\max(0, g_i(x)) + \frac{1}{4a}],$$

即

$$P(x, b) \leqslant \phi(x, a, b) \leqslant P(x, b) + \frac{bm}{4a},$$

再由 $x_k$ 是问题 $(P_2)$ 的最优解, 于是有

$$P(x_k, b) \leqslant \phi(x_k, a_k, b) \leqslant \phi(\hat{x}, a_k, b) \leqslant P(\hat{x}, b) + \frac{bm}{4a_k}.$$

令 $k \to +\infty$ 有 $P(x^*, b) \leqslant P(\hat{x}, b)$, 所以 $x^*$ 是问题 $(P_1)$ 的最优解.

由假设 1可知 $x$ 是原问题 $(P)$ 的最优解且有

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) = 0 = b\sum_{i=1}^{m} \max(0, g_i(x)),$$

于是

$$P(x, b) = f(x) = L(x, \lambda).$$

由假设 1知 $L(x, \lambda) \leqslant L(x, \lambda)$, 得出:

$$P(x, b) = L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) \leqslant L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x), \forall x$$

很明显有 $g_i(x) \leqslant \max(0, g_i(x))$, $\lambda_i \leqslant \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m}\{\lambda_i\} < b$, 所以有

$$f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) \leqslant f(x) + b\sum_{i=1}^{m} \max(0, g_i(x)), \forall x$$

特别对于非容许点 $x$ 有

$$0 < \max_{1 \leqslant i \leqslant m} g_i(x) = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} \max(0, g_i(x)),$$

$$P(x, b) \leqslant L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) < f(x) + b\sum_{i=1}^{m} \max(0, g_i(x)) = P(x, b).$$

总结以上有

$$P(x, b) < P(x, b), \forall x \notin D = \{x \mid g_i(x) \leqslant 0\}.$$

由 $P(x^*, b) = \min P(x, b)$ 知 $x^* \in D$, 故 $\max(0, g_i(x^*)) = 0$, $(i = 1, 2, \cdots, m)$, 即 $\| g^+(x^*) \|_1 = 0$

设 $y$ 是原问题 $(P)$ 的最优解, 由 $x^*$ 是问题 $(P_1)$ 的最优解, 则

$$f(x^*) = f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \max(0, g_i(x^*)) \leqslant f(y) + \sum_{i=1}^{m} \max(0, g_i(y)) = f(y),$$

所以有 $f(x^*) \leqslant f(y)$, 故 $x^*$ 是原问题 $(P)$ 的最优解.

算法 1中 $b$要求为一较大的常数, 在求解约束最优化问题的最优解之前很难给出 $b$的确切值, 为克服 $b$ 的选值困难, 据定理 2可给出算法 1的下列改进的算法 2

算法 **2**

①赋初值 $a_0 > 0$, $b_0 > 0$, $l > 1$, $x_0$, $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, 令 $k = 1$.

②利用 $x_{k-1}$ 求解 $\min\limits_{x \in \mathbf{R}^n} \phi(x, a_{k-1}, b_{k-1})$ 得到最优解 $x_k$.

③若 $\| x_k - x_{k-1} \| \leqslant \varepsilon_1$ 则转 ④, 否则 $a_{k+1} = l a_k$, $b_{k+1} = b_k$, $k = k + 1$转 ②.

④若 $\| g^+(x_k) \|_1 \leqslant \varepsilon_2$ 则停, 否则 $b_{k+1} = 10 b_k$, $a_{k+1} = a_k$, $k = k + 1$转 ②.

## 3　数值例子

为检验算法的可行性, 我们计算了文[5]中的例题, 在计算中, 取 $l = 5$, $b = 20$为固定数, $a_0 = 1\,000$, $\varepsilon = 0.000\,1$, $\phi(x, a, b)$ 的无约束最小化计算使用了一个标准 BFGS算法的子程序, 计算结果分别列于表 1 ~ 3.

例 **1**　Beale问题

$$\min f(x) = 9 - 8x_1 - 6x_2 - 4x_3 + 2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3,$$
$$\text{s.t.}\ g_i(x) = -x_i \leqslant 0, \quad i = 1, 2, 3,$$
$$g_4(x) = x_1 + x_2 + 2x_3 - 3 \leqslant 0$$

表 1 Beale问题的计算结果

Table 1 The result of the Beale problem

| No | $a$ | $f(x)$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 初始值 | 1 000 | 9 | 0 | 0 | 0 |
| 最优解 | | 1/9 | 4/3 | 7/9 | 4/9 |
| 1 | 1 000 | 0.111 3 | 1.333 7 | 0.777 6 | 0.443 9 |
| 2 | 5 000 | 0.111 2 | 1.333 4 | 0.777 7 | 0.444 3 |
| 3 | 25 000 | 0.111 1 | 1.333 4 | 0.777 8 | 0.444 4 |

例 2 Rosen-Suzuki问题

$$\min f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 - 5x_1 - 5x_2 - 21x_3 + 7x_4,$$

$$\text{s.t. } g_1(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 8 \leqslant 0,$$

$$g_2(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 - x_1 - x_4 - 10 \leqslant 0,$$

$$g_3(x) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 - x_2 - x_4 - 5 \leqslant 0.$$

表 2 Rosen-Suzuki问题的计算结果

Table 2 The result of the Rosen-Suzuki problem

| No | $a$ | $f(x)$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 初始值 | 1 000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 最优值 | | −44 | 0 | 1 | 2 | 1 |
| 1 | 1 000 | −43.997 5 | −0.000 1 | 1.000 0 | 1.999 9 | −1.000 0 |
| 2 | 5 000 | −43.999 5 | −0.000 0 | 1.000 0 | 2.000 0 | −1.000 0 |
| 3 | 25 000 | −43.999 9 | −0.000 0 | 1.000 0 | 2.000 0 | −1.000 0 |

例 3 Wong问题

$$\min f(x) = (x_1 - 10)^2 + 5(x_2 - 12)^2 + x_3^4 + 3(x_4 - 11)^2 + 10x_5^6 + 7x_6^2 + x_7^4 - 4x_6x_7 - 10x_6 - 8x_7,$$

$$\text{s.t. } g_1(x) = 2x_1^2 + 3x_2^4 + x_3 + 4x_4^2 + 5x_5 - 127 \leqslant 0,$$

$$g_2(x) = 7x_1 + 3x_2 + 10x_3^2 + x_4 - x_5 - 282 \leqslant 0,$$

$$g_3(x) = 23x_1 + x_2^2 + 6x_6^2 - 8x_7 - 196 \leqslant 0,$$

$$g_4(x) = 4x_1^2 + x_2 - 3x_1x_2 + 2x_3^2 + 5x_6 - 11x_7 \leqslant 0.$$

表 3 Wong问题的计算结果

Table 3 The result of the Wong problem

| No | $a$ | $f(x)$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 初始值 | 1 000 | 1 183 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 最优值 | | 680.630 | 2.330 5 | 1.951 4 | −0.477 54 | 4.365 7 | −0.624 49 | 1.038 1 | 1.594 2 |
| 1 | 1 000 | 680.631 4 | 2.330 4 | 1.951 4 | −0.477 5 | 4.365 7 | −0.624 5 | 1.038 1 | 1.594 2 |
| 2 | 5 000 | 680.630 3 | 2.330 5 | 1.951 4 | −0.477 5 | 4.365 7 | −0.624 5 | 1.038 1 | 1.594 2 |

由上述理论与计算结果可以看出, 本文提出的"准"精确罚函数法是求解非线性规划问题 ($P$)的一种非常有效的方法. 它具有理论上的严谨性, 计算上的高效性及易于计算机实际计算等特点. 例题结果表明仅用 1次无约束优化计算即可得到原问题的较高精度的近似解.

## [参考文献]


[1] 颜世建. 关于解非线性规划的一个修正凝聚函数法的注记 [J]. 南京师大学报: 自然科学版, 2002, 25(2): 94-96.

[2] 吴庆军. 非线性 $l_1$ 问题的光滑近似解 [J]. 玉林师范学院学报: 自然科学版, 2004, 25(5): 7-10.

[3] 颜世建, 葛福生. 非线性 $l_1$ 问题的一个算法 [J]. 南京师大学报: 自然科学版, 1999, 22(2): 1-7.

[4] 李兴斯. 解非线性规划的一个可微"准"精确罚函数 [J]. 科学通报, 1991, 36(19): 1 451-1 453.

[5] 李兴斯. 解非线性规划的凝聚函数法 [J]. 中国科学 (A 辑), 1991(12): 1 283-1 288.


[责任编辑: 陆炳新]