

# 权证定价的理论模型及实证分析

陈 波, 刘国祥, 章 媛

(南京师范大学数学与计算机科学学院, 江苏 南京 210097)

[摘要] 给出了 4 种权证定价模型, 并将其应用于中国证券市场上两种权证的定价中. 通过对图表的分析, 发现了模型间模拟精度的大小, 找到了理论价格与市场价格偏差的部分来源.

[关键词] Black-Scholes 二叉树, 蒙特卡罗, Koichiro-Takaoka, 期权定价

[中图分类号] O 212 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2008)02-0031-06

## Theoretical Models of Option Pricing and Probatal Analysis

Chen Bo, Liu Guoxiang, Zhang Yuan

(School of Mathematics and Computer Science, Nanjing Normal University, Nanjing 210097, China)

**Abstract** This paper introduces four option pricing models and applies them in calculating two Chinese options' price. By analyzing the figures, we find the degree of accuracy between models, then give some reasons for the difference between theoretical price and market price.

**Key words** Black-Scholes, binominal tree, Monte carlo, Koichiro-Takaoka, option pricing

2005 年 8 月 22 日宝钢权证开始发行, 随后相继上市的有五粮液权证、邯钢权证等. 虽然国外对于权证定价的研究很成熟, 但如何结合中国具体的情况将其合理的应用仍是一个值得探索的问题.

### 1 理论模型

#### 1.1 B-S 模型<sup>[1, 2]</sup>

假定标的资产股票价格遵循几何布朗运动:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \tag{1}$$

其中  $\mu$  为股票的收益率,  $\sigma$  为股票价格的波动率,  $B_t \geq 0$  为一标准布朗运动. 一般地,  $\sigma$  难以直接得到, 我们可通过以下方法<sup>[3]</sup> 进行估计.

假设我们观察得到  $n + 1$  个时间间隔末的股票价格  $S_i (i = 0 \dots, n)$ ,  $\tau$  为以年为单位表示的时间间隔的长度. 令  $u_i = \ln \left( \frac{S_i}{S_{i-1}} \right)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 则  $S_i = S_{i-1} e^{u_i}$ ,  $u_i$  的标准差  $s$  的估计值为:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n u_i^2}{n-1} - \frac{(\sum_{i=1}^n u_i)^2}{n(n-1)}}$$

其中  $\bar{u}$  为  $u_i$  的均值. 由 (1) 式推知  $\sigma$  可被估计为  $s^* = \frac{s}{\sqrt{\tau}}$ . 在实际应用时, 通常取所考察时刻前 180 d 的股票价格. 经验证明, 此取法精度较好.

对于欧式看涨期权<sup>[4]</sup>, 它是定义为一个非负的  $\mathcal{F}_t$  可测的任意变量  $h_t$ , 通常写成  $f(S_t)$ . 在  $t$  时刻期权的价值  $v_t$  可看成是关于  $t$  和  $S_t$  的函数, 且在概率测度  $P^*$  下平方可积, 有

收稿日期: 2007-07-20

基金项目: 国家自然科学基金 (10626028) 资助项目.

通讯联系人: 刘国祥, 副教授, 研究方向: 权证定价理论及实证. E-mail: gxlin63@163.com

$$v_t = E^* [ ( e^{-r(T-t)} f(S_T) ) | \mathcal{F}_t ] = E^* [ ( e^{-r(T-t)} f(S_t e^{\sigma(W_T - W_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)} ) ) | \mathcal{F}_t ],$$

其中  $E^*$  表示在  $P^*$  下求期望,  $S_t$  在  $P^*$  下关于  $\mathcal{F}_t$  可测,  $W_T - W_t$  与  $\mathcal{F}_t$  不相关. 易得欧式看涨期权的价格为

$$c = S_t N(d_1) - k e^{-r\theta} N(d_2),$$

这里  $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{k}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\theta}{\sigma\sqrt{\theta}}, d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\theta}, \theta = T - t, N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

1.2 二叉树模型及其推广形式<sup>[5]</sup>

首先我们讨论单步二叉树图.  
考虑一个无红利支付的股票, 股票价格为  $S_t$ , 以该股票为标的资产的某一衍生证券的当前价格为  $f$ . 假设当前时刻为零时刻, 则到期的  $T$  时刻的盈亏情况完全取决于当时的股票价格和衍生证券. 衍生证券有效期内股票价格或者从  $S$  向上运动到一个新的水平  $S_u$ , 或者向下运动到  $S_d (u > 1, d < 1, ud = 1)$ . 我们假设股票上升到  $S_u$  时, 衍生证券的收益为  $f_u$ , 若股价下降到  $S_d$  时相应为  $f_d$ . 想象一个证券组合由  $\Delta t$  股股票的多头和一个衍生证券的空头组成. 在股票价格升降情况下, 该证券组合在有效期末尾的价值分别为:

$$S_u \Delta - f_u, \quad S_d \Delta - f_d.$$

要使得该组合为无风险状态, 则以上两价值相等, 通过计算可得

$$\Delta = \frac{f_u - f_d}{S_u - S_d}.$$

又构造该组合的成本与该组合以无风险利率  $r$  的贴现值相等, 通过计算有:

$$f = e^{-rT} [pf_u + (1 - p)f_d],$$

其中  $p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}.$

下面我们讨论多步二叉树图.  
假设一个不付红利股票的美式看涨期权的有效期被分为  $N$  个长度为  $\Delta t$  的小段, 从  $i\Delta t$  到  $(i + 1)\Delta t$  股票价格或以概率  $p$  上升  $u$  倍, 或以概率  $1 - p$  下降  $d$  倍 ( $u > 1, d < 1, ud = 1$ ), 其中  $0 \leq i \leq N - 1, p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$ . 这样在  $i\Delta t$  时刻共有  $i + 1$  个结点. 易见在结点  $(i, j)$  的股票价格为  $S u^j d^{N-j}$ , 通过分析, 我们有以下结论:

定理 1<sup>[6]</sup> 假设当前买入了一个美式股票买权, 价格为  $f$ ,  $N$  期后到期. 标的股票当前价格为  $S$ , 而后任意一期, 其变化又有两种可能, 即以概率  $p$  上升  $u$  倍, 以概率  $1 - p$  下降  $d$  倍, 经过  $N$  期, 在到期日股票状态  $S_N$  的可能值为  $S u^j d^{N-j}$ , 即上涨  $j$  次, 下降  $N - j$  次. 则有

$$f = \sum_{j=m}^N [C_N^j p^j (1 - p)^{N-j} (S u^j d^{N-j} - X)] (e^{-r\Delta t})^N, \tag{2}$$

其中  $m$  为使得  $S u^j d^{N-j} - X > 0$  的最小正整数,  $\Delta t$  为单步时间段,  $C_N^j = \frac{N!}{j! (N - j)!}$ . 关于定理的证明, 我们可以从多步二叉树图倒推归纳得到.

在实际应用二叉树图的方法时, 通常将期权存续期分成 30 个或更多的时间步. 30 个时间步意味着最后有 31 个终端股票价格, 并且有  $2^{30}$  即大约有 10 亿个可能的股价路径.

从股票价格波动率  $\sigma$  可以确定  $u$  和  $d$  的值. 有许多不同的方法做到这一点. 如果我们定义  $\Delta t$  为单步时间步长, 一种可能就去设定:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = \frac{1}{u}, \quad p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}. \tag{3}$$

对于在实际中计算 (2) 式, 我们一般都采用 (3) 式, 其中  $ud = 1$  的假设虽然在多数情况下计算结果令人满意, 但仍存在明显的缺陷: 对于较小的  $\sigma$ , 将产生大于 1 或负的概率. 例如, 取  $r = 0.12, \Delta t = 0.1, \sigma = 0.01$ , 通过 (3) 式可得  $p = 2.4080, 1 - p = -1.4080$ . 这种结果失去实际意义. 一种不错的假设是令  $p = \frac{1}{2}$ .

命题 1 在二叉树图模型中, 当我们令股票价格升降等可能时 (即令  $p = \frac{1}{2}$ ), 我们有:

$$\begin{aligned}u &= e^{r\Delta t} + \sigma\sqrt{\Delta t} \\d &= e^{r\Delta t} - \sigma\sqrt{\Delta t}\end{aligned}$$

证明 我们可以结合股票价格模型<sup>[3]</sup>:  $\Delta S = S\mu\Delta t + S\sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon$  ( $\varepsilon$  为标准正态分布的随机值), 通过分析其期望值和方差得到以上结果.

这是个美妙而合理的结果. 新模型克服了原模型负概率的产生, 且计算结果较为精确.

### 1.3 蒙特卡罗模型

我们知道, 二叉树图方法一般将权证存续期分成 30 个或更多小时时间段, 这样最后的结点数就非常多, 不利于倒推计算起始时刻权证的价格. 一种有效的模拟权证价格方法就是蒙特卡罗模型. 考虑一种欧式衍生证券, 在时刻  $T$  的收益为  $f_T$ , 则在 0 时刻其价值为:

$$f = E[f_T e^{-rt}], \quad (4)$$

其中  $E$  代表风险中性世界的期望,  $r$  为 0 到  $T$  时刻瞬时利率的平均值. 若  $r$  已知, 则 (4) 式即为:

$$f = e^{-rt} E[f_T].$$

这样要计算权证的价值, 只需求出时刻  $T$  权证价值的期望值. 此时我们可以从二叉树图的路径中取 1 000 条通过均值计算来近似  $E(f_T)$ , 从而求得  $f$ .

一般地, 在风险中性世界里,  $S$  的离散形式如下:

$$\Delta S = rS\Delta t + \sigma S\epsilon\sqrt{\Delta t} \quad (5)$$

其中  $\Delta t$  为将期权有效期分成  $N$  个小时时间段的长度,  $\Delta S$  是在  $\Delta t$  时间内  $S$  的变化量,  $\epsilon$  为服从标准正态分布的一个随机样本. 为进行一次随机模拟, 须从正态分布中抽取  $N$  个独立的随机样本代入 (5) 式, 可计算出  $Q$   $\Delta t$   $2\Delta t$   $\dots$   $T$  时刻的  $\Delta S$  的值. 这样计算提供了一条  $S$  的模拟路径. 因此可以算得衍生证券的一个样本终值. 而对于  $\epsilon$  的取法, 由中心极限定理, 它可以用下式来求得:

$$\epsilon = \sum_{i=1}^6 R_i - \sum_{i=7}^{12} R_i$$

其中  $R_i$  ( $1 \leq i \leq 12$ ) 是  $[0, 1]$  上相互独立的随机数.

### 1.4 Kojichiro-Takaoka 模型

$\lambda$  是  $(R_{++}, \mathcal{B}(R_{++}))$  上确定的测度, 使得:

$$\lambda(R_{++}) = 1, \quad \int \sigma \lambda(d\sigma) < \infty,$$

$w$  是带域流  $(\Omega, \mathcal{F}/(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$  上的标准 Brown 运动,  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  是  $w$  产生的自然域流<sup>[7]</sup>.

命题 2 存在唯一的与  $P$  等价的概率测度  $Q$ , 使得股票价格过程  $(S_t)_{t \geq 0}$ :

$$S_t = S_0 e^{rt} \int_0^t e^{\sigma(w_s + a) - \frac{\sigma^2}{2}s} \lambda(d\sigma)$$

的折现过程  $(S_t)_{t \geq 0}$  是鞅, 其中  $r, c$  是常数.

命题 3 设欧式看涨期权的敲定价格为  $K$ , 存续时间为  $T$ , 则其在时刻  $t$  的价格为:

$$E^Q\left[\frac{(S_T - K)_+}{e^{r(T-t)}}\right] = S_t \int \Phi\left[-\frac{x_t}{\sqrt{T-t}} + \sigma_t \sqrt{T-t}\right] \lambda(d\sigma_t) - K e^{-r(T-t)} \Phi\left[-\frac{x_t}{\sqrt{T-t}}\right],$$

其中,  $x_t$  是如下方程的惟一解

$$S_t e^{r(T-t)} \int_0^\infty e^{\sigma^2 \frac{T-t}{2}} \lambda(d\sigma_t) = K. \quad (6)$$

至于  $\sigma_t$  的分布, 为便于计算, 可取特殊的均匀分布  $U(a_t, b_t)$ , 其中

$$E\sigma_t = \frac{a_t + b_t}{2}, \quad D\sigma_t = \frac{(b_t - a_t)^2}{12}.$$

需要说明的是, 在求解方程 (6) 时, 由于对函数  $e^{\sigma^2 \frac{T-t}{2}}$  关于  $\sigma_t$  求定积分时, 自变量不能含有参数, 这里我们

将  $\sigma_{i,x}$  中的  $\sigma_i$  用其期望  $E\sigma_i = \frac{a_i + b_i}{2}$  近似, 从而使得  $e^{\sigma_i x}$  从积分项中移走, 被积函数变为可积.

## 2 模型定价的实证分析

### 2.1 权证发行的基本情况

本文对已发行的五粮液权证和邯钢权证进行了定价分析. 首先介绍一下它们的基本情况.

(1) 五粮液权证: 总计 297 872 640份五粮液认购权证于 2006年 4月 3日上市. 权证简称五粮 YGC1 期限为 24个月, 行权价为 6.93元 /股, 行权期间为最后 5个交易日, 行权比例 1: 1

(2) 邯钢权证: 权证类型为认购权证; 发行数量为 925 705 299份; 权证简称为邯钢 GTB1, 有效期从 2006年 4月 5日到 2006年 4月 4日; 行权价格为 2.80元 /股; 行权期间为最后 5个交易日; 行权比例为 1: 1

### 2.2 理论模型下权证价值分析

我们对五粮 YGC1和邯钢 GTB1分别运用以上介绍的 4种模型, 计算出它们的理论价值. 需要说明的是: 我们只给出在权证存续期里每日标的股票收盘时相应权证的价值. 对于具体的每一日, 相应的标的股票价格波动率取其之前 180 d股票价格通过统计方法估计得到.

对于五粮液权证, 我们计算了从 2006年 4月 3日到 2007年 1月 18日共 193 d的权证价值; 而邯钢权证, 我们计算了从 2006年 4月 7日到 2007年 1月 19日共 190 d的权证价值. 并将计算出的权证理论价格绘制成图. 这里, 我们以权证实际价格为标准, 两两比较了 4种模型对应的计算结果的精确程度.

在进行精确度的比较时, 我们可以观察图像得到大概结果; 但当两种模拟图效果非常接近时, 单凭观察难辨优劣. 为此我们定义了数组距离的概念.

定义 1 给定两组数列  $a_i(i = 1, \dots, n)$ ,  $b_i(i = 1, \dots, n)$ , 令

$$d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}{n}},$$

则称  $d$  为数列  $b_i(i = 1, \dots, n)$  与数列  $a_i(i = 1, \dots, n)$  的距离.

命题 4 对于由 2个数列所绘制成的图形, 当图形越接近时, 数列的距离越小, 反之也成立.

以下我们利用 4种模型, 计算了五粮液权证自上市之日起至 2007年 1月 18日共 193 d的权证的理论价格, 并和其市场价格数据一起绘制成图 1 ~ 3

从图 1我们可以看出, 两种模型计算的权证价格图与真实市场价格图基本吻合, 升降趋势一致, 单从图上难辨谁更精确. 但经计算得, B-S模型和二叉树模型所得的权证理论价格数据与真实数据的距离分别是 1.129 0和 1.162 3. 显然 1.129 0比 1.162 3小, 从此角度看, 在该例中 B-S模型较二叉树模型模拟结果更精确.

从图 2我们可看出, 两种模拟图与市价图基本吻合, 升降趋势一致; 仔细观察发现, 图中二叉树模型比 K-T模型所对应的曲线从第 5 d到第 150 d更加接近真实数据图, 此后它们基本重合, 偏离市价图较大; 经计算得, K-T模型模拟数据与真实数据的距离为 1.399 7, 显然二叉树模型对应的小. 以上两方面均表明, 该例中二叉树模型较 K-T模型模拟结果更好.

从图 3我们可以看出, 两种模型模拟权证价格图与市场价格图基本吻合, 升降趋势一致. 在前 20 d左右, 两理论价格图基本重合, 在随后的 90 d左右 K-T模型模拟结果较蒙特卡罗模型的偏离市价更远, 但之后情况恰恰相反, 综合考虑, 两模型精确度不分上下; 但蒙特卡罗模型权证理论价格数据与真实数据的距离是

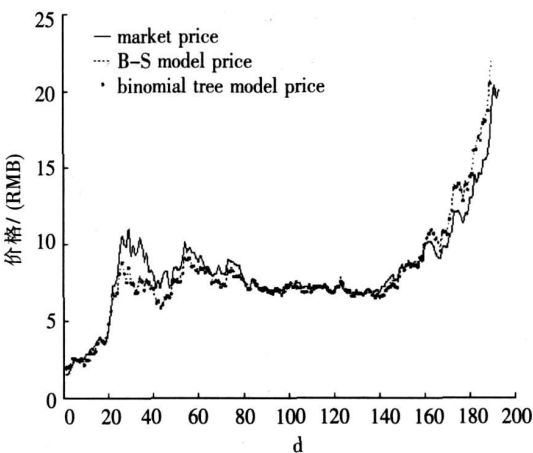


图 1 五粮液权证的 B-S 模型和二叉树模型的理论价格与市场价格比较

Fig.1 Comparison of W-L-Y market price with theoretical model price of B-S and binomial tree

1 723 8 显然 K-T 模型对应的小, 故在距离标准下, 此例中的 K-T 模型比蒙特卡罗模型精确度更高。

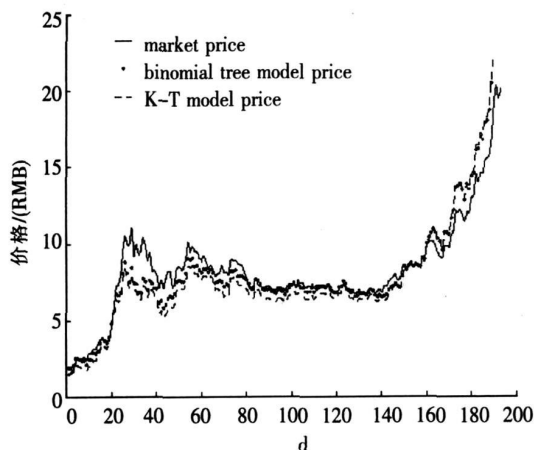


图 2 五粮液权证的二叉树模型和 K-T 模型的理论价格与市场价格比较

Fig.2 Comparison of W-L-Y market price with theoretical model price of binomial tree and K-T

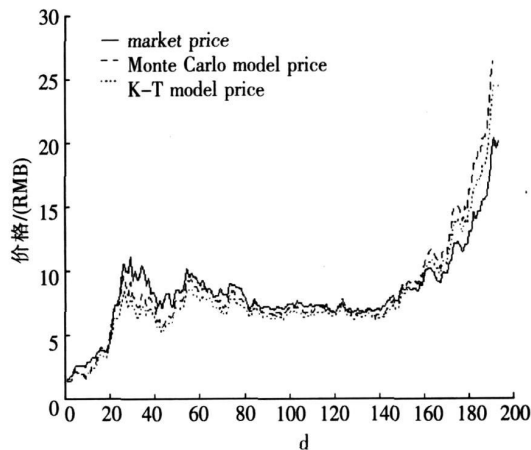


图 3 五粮液权证的蒙特卡罗模型和 K-T 模型的理论价格与市场价格比较

Fig.3 Comparison of W-L-Y market price with theoretical model price of Monte Carlo and K-T

以下我们利用 4 种模型, 计算了邯钢权证自上市之日起至 2007 年 1 月 19 日共 190 d 的权证理论价格, 并和其实际市场价格数据一起绘制成图 4~6

从图 4 我们可以看出, 两种模型模拟权证价格图与市场价格图偏差不大, 形状基本吻合, 升降趋势一致。易见图中在大部分时间里, 蒙特卡罗模型模拟结果较 B-S 模型更接近实际; 经计算可得, 两种模拟结果与市场价格距离分别为 0.278 4 和 0.323 5, 显然蒙特卡罗模型对应的小, 印证了观察结果。

从图 5 我们可以看出, 两种模型计算的权证价格图以一定的偏差随着市场价格图上升或下降。图像显示, 在前 130 d 两种模拟图交替着靠近市价图, 随后它们几乎重合在一起, 综合看难说谁更精确; 但从与市价数据的距离看, B-S 模型的 0.323 5 比 K-T 模型的 0.333 9 小, 故更胜一筹。

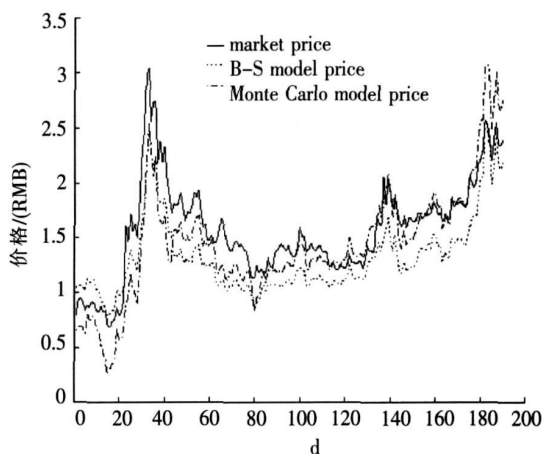


图 4 邯钢权证的 B-S 模型和蒙特卡罗模型的理论价格与市场价格比较

Fig.4 Comparison of H-G market price with theoretical model price of B-S and Monte Carlo

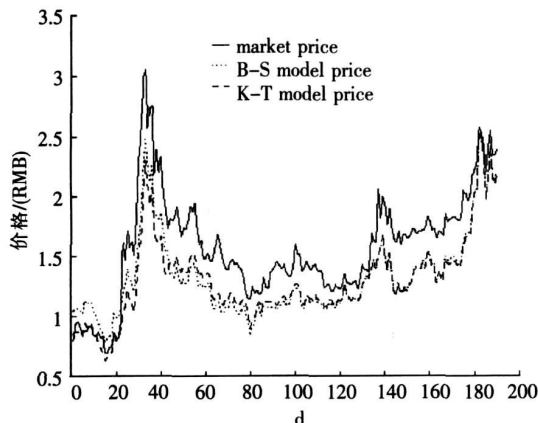


图 5 邯钢权证的 B-S 模型和 K-T 模型的理论价格与市场价格比较

Fig.5 Comparison of H-G market price with theoretical model price of B-S and K-T

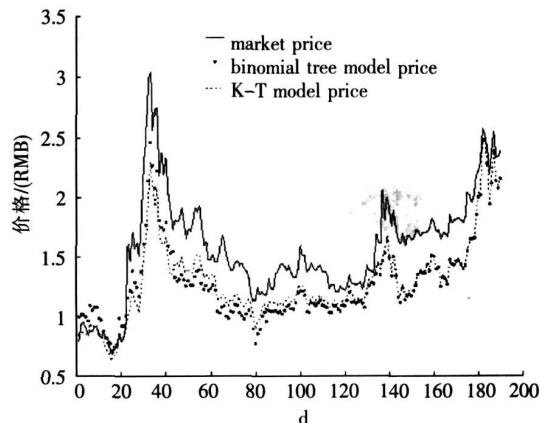


图 6 邯钢权证的 K-T 模型和二叉树模型的理论价格与市场价格比较

Fig.6 Comparison of H-G market price with theoretical model price of K-T and binomial tree

从图 6 我们可以看出, 两种模型计算的权证价格图以一定的偏差随着市场价格图上升或下降. 虽然在后 60 余天两模拟图基本重合, 但之前在接近市价图方面,  $K-T$  模型具有明显优势. 若计算理论价与市价的距离,  $K-T$  模型的 0.3339 同样小于二叉树模型的 0.3420.

## 2.3 结论及启示

通过以上分析, 我们得到以下结论:

(1) 关于两种权证价格的 4 种模型模拟中, 蒙特卡罗模型分别最接近和最不接近实际价格曲线图, 效果不稳定. 这和我们只选定一条股票价格路径有关, 因为模型中需要 1 000 次, 这里是远远不够的.

(2) 除去蒙特卡罗模型, 关于两种权证价格的 3 种模型模拟中,  $B-S$  模型模拟的结果都最接近实际价格曲线图, 这与大多证券公司采用此模型进行权证定价相吻合.

(3) 在剩下的两种模型中, 模拟结果不分上下. 在  $K-T$  模型中, 股票波动率  $\sigma$  为一个随机变量, 是  $B-S$  模型的一种推广, 计算结果应更加精确. 但是在实际中, 我们对相关的方程的求解采取了近似处理, 产生一部分人为误差.

(4) 对于推广的二叉树模型, 实际模拟结果比较接近实际曲线图, 从而印证了该模型推广形式的实用性.

(5) 4 种模型模拟结果都很接近市场价, 能较好地应用于我国权证的定价.

(6) 虽然每种模型模拟的结果都比较令人满意, 但与权证实际价格曲线图都存在一定的误差. 这一方面说明我们对权证定价因素考虑不全面, 另一方面, 未考虑的因素可能会很多, 但只是次要的方面.

此外, 我们得到以下启示:

为进一步提高模型模拟的精确度, 我们给出了权证定价时需考虑的其他因素如下:

(1) 以上 3 种模型都未考虑交易费用, 使得权证的价值偏低.

(2) 标的证券在除权除息时, 证券行权比例、行权价格将作相应的调整. 这里我们忽略了.

(3) 理论上, 权证的价格由标的股票价格的走势决定, 但是目前市场存在不完美因素, 套利机制尚不能很好地工作, 权证供应机制不能很快见效, 所以权证价格在很大程度上受市场供求关系的影响.

(4) 未考虑闭市的情况.

同时, 我们可以考虑一些技术因素:

(1) 对于股票价格波动率  $\sigma$ , 文中利用目标时刻过去 180 d 股票价格数据, 通过统计方法估计出, 这在方法及时间长短的选取上都会产生误差.

(2) 我们将考虑时刻至到期日的时间分成 30 个小段来模拟股票的价格路径, 最后时刻共有 31 种可能最终价, 而现实价有更多种.

(3) 在蒙特卡罗模型中, 我们通过计算机逻辑运算得到伪随机数, 模拟了一条股票价格路径. 随机的有限性和模拟次数的不足都降低了模拟的精确度.

为了得到更精确的模拟结果, 我们可以对考虑尚欠成熟之处和以上未考虑因素进行更深入的研究.

## [参考文献]

- [1] 张顺明. 证券估值 Black-Scholes 模型的一般化 [J]. 经济数学, 1999, 16(2): 13-20.
- [2] 杨春鹏. 实物期权及其应用 [M]. 上海: 复旦大学出版社, 2003.
- [3] 姜礼尚. 期权定价的数学模型和方法 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [4] 孙胜利. 欧式期权定价原理及应用 [J]. 河南科学, 2005, 23(6): 794-797.
- [5] 张铁. 一个新型的期权定价二叉树参数模型 [J]. 系统工程理论与实践, 2000, 20(11): 90-93.
- [6] John C Hull O. Future and Other Derivative Securities [M]. 2nd ed. Beijing: Prentice Hall, 1999.
- [7] 刘嘉. 应用随机过程 [M]. 北京: 科学出版社, 2000.

[责任编辑: 陆炳新]