具有分布滞量含阻尼项的非线性双曲偏微分方程解的振动性

高正晖, 罗李平

(衡阳师范学院数学系, 湖南 衡阳 421008)

[摘要] 研究了一类具有连续分布滞量含阻尼项的非线性双曲型偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}+p(t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+A(x,t)u(x,t)+\sum_{i=1}^{m_1}\int_a^b B_i(x,t,\tau)f_i(u(x,r_i(t,\tau)))d m(\tau)$$

$$=C(t)\Delta u(x,t)+\sum_{j=1}^{m_2}\int_a^b D_j(t,\tau)\Delta u(x,r_2(t,\tau))d m(\tau),$$

获得了该方程在两类边值条件下解振动的充分条件.

[关键词] 双曲型偏微分方程, 连续分布滞量, 阻尼项, 振动性
[中图分类号] O175.27 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2008)02-0041-04

Oscillation of the Solutions of Nonlinear Hyperbolic Partial Differential Equation With Continuous Delay and Damped Terms

Gao Zhenghui, Luo Liping

(Department of Mathematics, Hengyang Normal University, Hengyang 421008, China)

Abstract: This paper studies oscillation of the solutions of hyperbolic partial differential equation with continuous delay arguments and damped terms. Sufficient conditions for each solution to be oscillation are obtained under two kinds of different boundary value conditions.

Key words: hyperbolic partial differential equation, continuous delay argument, damped terms, oscillation

由于泛函微分方程在自然科学和工程技术方面的广泛应用, 对泛函微分方程的研究发展非常迅速. 时滞双曲型偏微分方程解的振动性, 已有很多学者作了大量的研究, 获得了许多成果[1-7], 对具有时滞含阻尼项的双曲型偏微分方程解的振动性的研究成果却不多[8], 本文将讨论一类具有连续分布滞量含阻尼项的双曲型偏微分方程(E)

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}+p(t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+A(x,t)u(x,t)+\sum_{i=1}^{m_1}\int_a^b B_i(x,t,\tau)f_i(u(x,r_i(t,\tau)))d m(\tau)=$$

$$C(t)\Delta u(x,t)+\sum_{j=1}^{m_2}\int_a^b D_j(t,\tau)\Delta u(x,r_2(t,\tau))d m(\tau)$$

解的振动性. 其中 $(x,t)\in\Omega\times\mathbf{R}_+\equiv G$, $\mathbf{R}_+=[0,\infty)$, $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 有界且 $\partial\Omega$ 逐片光滑,

$$\Delta u(x,t)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_j^2},\qquad (x,t)\in G.$$

获得了该方程在边值条件 (B_1)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial N}+g(x,t)u(x,t)=0,\qquad (x,t)\in\partial\Omega\times\mathbf{R}_+$$

收稿日期: 2007-10-28
基金项目: 湖南省自然科学基金(05JJ40008)资助项目.
通讯联系人: 高正晖, 副教授, 研究方向: 微分方程的定性与振动性. E-mail: gaozh828@163.com

或边值条件(B_2)

$$u(x,t)=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times\mathbf{R}_+$$

之下解的振动性的充分条件,其中N是$\partial\Omega$的单位法向量,并且$g(x,t)$是$\partial\Omega\times\mathbf{R}_+$上的非负连续函数.

对于方程(E),假定成立下列条件:

(C_1) $A(x,t)\in C(G;\mathbf{R}_+)$, $A(t)=\min\{A(x,t),x\in\Omega\}>0$.

(C_2) $B_i(x,t,\tau)\in C(G\times[a,b];\mathbf{R}_+)$, $B_i(t,\tau)=\min\{B_i(x,t,\tau),x\in\Omega\}$.

(C_3) $r_i(t,\tau)\in C(\mathbf{R}_+\times[a,b];\mathbf{R}_+)$, $r_i(t,\tau)\leqslant t$, $r_i(t,\tau)$关于t, τ分别为单调增加函数,且$\lim\limits_{t\to+\infty}\min\limits_{\tau\in[a,b]}r_i(t,\tau)=+\infty(i=1,2)$.

(C_4) $m(\tau)$是关于τ在$[a,b]$上的非减实函数,方程(E)中的积分为 Stieltjes积分.

(C_5) $f_i(u)\in C(\mathbf{R};\mathbf{R})$,且对$u\neq0$,存在常数$M_i>0$,使得$\dfrac{f_i(u)}{u}\geqslant M_i$.

(C_6) $p(t)\in C(\mathbf{R}_+;\mathbf{R}_+)$, $C(t)\in C(\mathbf{R}_+;\mathbf{R}_+)$, $D_j(t,\tau)\in C(\mathbf{R}_+\times[a,b];\mathbf{R}_+)$.

定义　一个定义在$\Omega\times[0,+\infty)$上的实值可微函数$u(x,t)$称为是振动的,如果对每一个$\mu>0$,都存在一点$(x_0,t_0)\in\Omega\times[\mu,+\infty)$,使得$u(x_0,t_0)=0$,否则$u(x,t)$称为是非振动的.

1　定理 1的证明

定理 1　对于方程(E)、(B_1),条件$(C_1)\sim(C_6)$成立,若满足

(C_7) $\int_T^{+\infty}\exp\left(\int_\xi^{t_1}p(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\xi=+\infty$,

(C_8) $\int_T^{+\infty}\left\{\sum\limits_{i=1}^{m_1}M_i\int_a^bB_i(\zeta,\tau)\mathrm{d}m(\tau)\exp\left(\int_{r_1(\zeta,a)}^{\zeta}p(s)\mathrm{d}s\right)\int_{t_1}^{r_1(\zeta,a)}w(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}\mathrm{d}\zeta=+\infty(T>0)$,

则方程(E),(B_1)的每一个解在G内振动.

证明　(反证法)假设$u(x,t)$是方程(E)、(B_1)的非振动解,则存在$\mu>0$,不妨设有$u(x,t)>0$, $(x,t)\in\Omega\times[\mu,+\infty)$.由$\lim\limits_{t\to+\infty}\min\limits_{\tau\in[a,b]}r_i(t,\tau)=+\infty$,存在$t_1\geqslant\mu>0$,当$t>t_1$时,有$u(x,r_i(t,\tau))>0$, $i=1,2$.

对方程(E)在Ω上关于x积分,于是当$t\geqslant t_1>0$时可得

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\int_\Omega u(x,t)\mathrm{d}x+p(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u(x,t)\mathrm{d}x+\int_\Omega A(x,t)u(x,t)\mathrm{d}x+$$
$$\sum_{i=1}^{m_1}\int_\Omega\left[\int_a^bB_i(x,t,\tau)f_i(u(x,r_1(t,\tau)))\mathrm{d}m(\tau)\right]\mathrm{d}x=$$
$$C(t)\int_\Omega\Delta u(x,t)\mathrm{d}x+\sum_{j=1}^{m_2}\int_a^bD_j(t,\tau)\int_\Omega[\Delta u(x,r_2(t,\tau))]\mathrm{d}x\mathrm{d}m(\tau).\tag{1}$$

由 Green公式及边值条件(B_1)有:

$$\int_\Omega\Delta u(x,t)\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u(x,t)}{\partial N}\mathrm{d}s=-\int_{\partial\Omega}g(x,t)u(x,t)\mathrm{d}s\leqslant0,\tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{m_2}\int_a^bD_j(t,\tau)\left[\int_\Omega\Delta u(x,r_2(t,\tau))\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}m(\tau)=$$
$$-\sum_{j=1}^{m_2}\int_a^bD_j(t,\tau)\left[\int_{\partial\Omega}g(x,t)u(x,r_2(t,\tau))\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}m(\tau)\leqslant0\tag{3}$$

又根据条件$(C_1)\sim(C_6)$有:

$$\int_\Omega A(x,t)u(x,t)\mathrm{d}x\geqslant A(t)\int_\Omega u(x,t)\mathrm{d}x,\tag{4}$$

$$\int_\Omega\left[\sum_{i=1}^{m_1}\int_a^bB_i(x,t,\tau)f_i(u(x,r_1(t,\tau)))\mathrm{d}m(\tau)\right]\mathrm{d}x\geqslant$$
$$\sum_{i=1}^{m_1}\int_a^bB_i(t,\tau)\left[\int_\Omega f_i(u(x,r_1(t,\tau)))\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}m(\tau)\geqslant$$

$$\sum_{i=1}^{m} M_i \int_a^b B_i(t,\tau)\left[\int_\Omega u(x, r_1(t,\tau))\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}\eta(\tau). \tag{5}$$

令 $v(t)=\int_\Omega u(x,t)\mathrm{d}x$, 则当 $t\geqslant t_1>0$时, $v(t)>0$ 于是, 由(1)–(5) 有

$$v''(t)+p(t)v'(t)+A(t)v(t)+\sum_{i=1}^{m} M_i \int_a^b B_i(t,\tau)v(r_1(t,\tau))\mathrm{d}\eta(\tau)\leqslant 0 \tag{6}$$

因此有

$$v''(t)+p(t)v'(t)+\sum_{i=1}^{m} M_i \int_a^b B_i(t,\tau)v(r_1(t,\tau))\mathrm{d}\eta(\tau)\leqslant 0 \tag{7}$$

令 $w(t)=v'(t)\exp\left(\int_{t_1}^t p(s)\mathrm{d}s\right)$, 得 $w'(t)=v''(t)\exp\left(\int_{t_1}^t p(s)\mathrm{d}s\right)+p(t)v'(t)\exp\left(\int_{t_1}^t p(s)\mathrm{d}s\right)$,
对(7) 两边同乘 $\exp\left(\int_{t_1}^t p(s)\mathrm{d}s\right)$, 得

$$w'(t)+\exp\left(\int_{t_1}^t p(s)\mathrm{d}s\right)\sum_{i=1}^{m} M_i \int_a^b B_i(t,\tau)v(r_1(t,\tau))\mathrm{d}\eta(\tau)\leqslant 0 \tag{8}$$

因此有 $w'(t)\leqslant 0$, 亦有 $w(t)\leqslant w(t_1)$. 又

$$\int_{t_1}^t w(\xi)\mathrm{d}\xi=\int_{t_1}^t v'(\xi)\exp\left(\int_{t_1}^{\xi} p(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\xi=$$

$$v(\xi)\exp\left(\int_{t_1}^{\xi} p(s)\mathrm{d}s\right)\Big|_{t_1}^{t}-\int_{t_1}^t v(\xi)p(\xi)\exp\left(\int_{t_1}^{\xi} p(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\xi=$$

$$v(t)\exp\left(\int_{t_1}^t p(s)\mathrm{d}s\right)-v(t_1)-\int_{t_1}^t v(\xi)p(\xi)\exp\left(\int_{t_1}^{\xi} p(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\xi\leqslant v(t)\exp\left(\int_{t_1}^t p(s)\mathrm{d}s\right), \tag{9}$$

$$w'(t)+\sum_{i=1}^{m} M_i \int_a^b B_i(t,\tau)\mathrm{d}\eta(\tau)\exp\left(\int_{r_1(t,a)}^t p(s)\mathrm{d}s\right)\int_{t_1}^{r_1(t,a)} w(\xi)\mathrm{d}\xi\leqslant 0. \tag{10}$$

下证当 $t\geqslant t_1>0$时, $w(t)\geqslant 0$ 若不然, $w(t)<0$ 则有 $T\geqslant t_1>0$, $w(T)=\alpha<0$

由 $w(t)=v'(t)\exp\left(\int_{t_1}^t p(s)\mathrm{d}s\right)$, 得 $v'(t)=w(t)\exp\left(\int_t^{t_1} p(s)\mathrm{d}s\right)<\alpha\exp\left(\int_t^{t_1} p(s)\mathrm{d}s\right)$, 因此 $v(t)<v(T)+\alpha\int_T^t \exp\left(\int_t^{t_1} p(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\xi$ 取极限及由条件(C_7)有

$$\lim_{t\to+\infty} v(t)<v(T)+\alpha\int_T^{+\infty}\exp\left(\int_\xi^{t_1} p(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\xi=-\infty,$$

这与 $v(t)\geqslant 0$矛盾, 因此 $w(t)\geqslant 0$

对(10) 在$[T, t]$上关于 t积分, 得

$$w(t)\leqslant w(T)-\sum_{i=1}^{m} M_i\int_T^t\left\{\int_a^b B_i(\zeta,\tau)\mathrm{d}\eta(\tau)\exp\left(\int_{r_1(\zeta,a)}^{\zeta} p(s)\mathrm{d}s\right)\int_{t_1}^{r_1(\zeta,a)} w(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}\mathrm{d}\zeta$$

取极限及由条件(C_8) 有

$$\lim_{t\to+\infty} w(t)\leqslant w(T)-\sum_{i=1}^{m} M_i\int_T^{+\infty}\left\{\int_a^b B_i(\zeta,\tau)\mathrm{d}\eta(\tau)\exp\left(\int_{r_1(\zeta,a)}^{\zeta} p(s)\mathrm{d}s\right)\int_{t_1}^{r_1(\zeta,a)} w(\xi)\mathrm{d}\xi\right\}\mathrm{d}\zeta=-\infty,$$

这与 $w(t)\geqslant 0$矛盾. 定理 1得证.

2 定理 2的证明

为了证明主要定理, 我们引入一个引理

引理[9] 特征值问题 $\begin{cases}\Delta\varphi(x)+\lambda\varphi(x)=0, & x\in\Omega\\ \varphi(x)=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}$ (λ是常数)
的最小特征值 $\lambda_0>0$, 且它所对应的特征函数 $\varphi_0(x)>0$, $x\in\Omega$.

定理 2 若定理 1中的所有条件都满足, 则方程(E)、(B_2)的每一个解在 G内振动.

证明 (反证法) 假设 $u(x,t)$是方程(E)、(B_2)的非振动解, 则存在 $\mu>0$, 不妨设有 $u(x,t)>0$,

$(x,t)\in\Omega\times[\mu,+\infty)$. 由 $\lim_{t\to+\infty}\min_{\tau\in[a,b]} r_i(t,\tau)=+\infty$, 存在 $t_1\geqslant\mu>0$, 当 $t>t_1$ 时, 有 $u(x,r_i(t,\tau))>0$, $i=1,2$.

对方程(E)两边乘以 $\varphi_0(x)$ 并在 Ω 上关于 x 积分, 于是当 $t\geqslant t_1>0$ 时可得

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_\Omega\varphi_0(x)u(x,t)dx+p(t)\frac{d}{dt}\int_\Omega\varphi_0(x)u(x,t)dx+\int_\Omega\varphi_0(x)A(x,t)u(x,t)dx+$$
$$\sum_{i=1}^{m_1}\left\{\int_\Omega\left[\varphi_0(x)\int_a^b B_i(x,t,\tau)f_i(u(x,r_1(t,\tau)))d\eta(\tau)\right]dx\right\}=$$
$$C(t)\int_\Omega\varphi_0(x)\Delta u(x,t)dx+\sum_{j=1}^{m_2}\int_a^b D_j(t,\tau)\int_\Omega[\varphi_0(x)\Delta u(x,r_2(t,\tau))d\eta(\tau)]dx. \tag{11}$$

利用 Green公式及边值条件(B_2), 有

$$\int_\Omega\varphi_0(x)\Delta u(x,t)dx=\int_\Omega u(x,t)\Delta\varphi_0(x)dx=-\lambda_0\int_\Omega u(x,t)\varphi_0(x)dx\leqslant 0, \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{m_2}\int_a^b D_j(t,\tau)\left[\int_\Omega\varphi_0(x)\Delta u(x,r_2(t,\tau))dx\right]d\eta(\tau)=$$
$$-\lambda_0\sum_{j=1}^{m_2}\int_a^b D_j(t,\tau)\left[\int_\Omega\varphi_0(x)u(x,r_2(t,\tau))dx\right]d\eta(\tau)\leqslant 0. \tag{13}$$

又根据条件(C_1)~(C_6)有

$$\int_\Omega\varphi_0(x)A(x,t)u(x,t)dx\geqslant A(t)\int_\Omega\varphi_0(x)u(x,t)dx, \tag{14}$$

$$\sum_{i=1}^{m_1}\left\{\int_\Omega\left[\varphi_0(x)\int_a^b B_i(x,t,\tau)f_i(u(x,r_1(t,\tau)))d\eta(\tau)\right]dx\right\}\geqslant$$
$$\sum_{i=1}^{m_1}\left\{\int_a^b B_i(t,\tau)\left[\int_\Omega\varphi_0(x)f_i(u(x,r_1(t,\tau)))dx\right]d\eta(\tau)\right\}\geqslant$$
$$\sum_{i=1}^{m_1}M_i\int_a^b B_i(t,\tau)\left[\int_\Omega\varphi_0(x)u(x,r_1(t,\tau))dx\right]d\eta(\tau). \tag{15}$$

令 $v(t)=\int_\Omega\varphi_0(x)u(x,t)dx$, 则当 $t\geqslant t_1>0$ 时, $v(t)>0$. 于是由(11)~(15)有

$$v''(t)+p(t)v'(t)+A(t)v(t)+\sum_{i=1}^{m_1}M_i\int_a^b B_i(t,\tau)v(r_1(t,\tau))d\eta(\tau)\leqslant 0. \tag{16}$$

以下证明与定理 1相应部分的证明相类似. 定理 2得证.

[参考文献]

[1] 何猛省, 高述春. 双曲时滞偏微分方程解的振动性质[J]. 科学通报, 1992, 37(13): 1163-1166.

[2] 崔宝同, 俞元洪, 林诗仲. 具有时滞的双曲型微分方程解的振动性[J]. 应用数学学报, 1996, 19(1): 80-89.

[3] 刘安平, 李星, 刘克英. 双曲型时滞偏微分方程解振动的充要条件[J]. 工程数学学报, 2003, 20(4): 117-120.

[4] 王培光, 葛渭高. 双曲偏泛函微分方程解的振动性[J]. 应用数学和力学, 1999, 20(7): 699-706.

[5] 高正晖, 罗李平. 具有连续时滞的双曲型偏微分方程解的振动性[J]. 重庆师范大学学报: 自然科学版, 2007, 24(1): 11-14.

[6] 罗李平, 欧阳自根. 非线性脉冲时滞双曲型方程组的振动准则[J]. 南京师大学报: 自然科学版, 2006, 29(4): 31-35.

[7] 孙元功. 一类二阶非线性时滞微分方程的振动性定理[J]. 南京师大学报: 自然科学版, 2002, 25(4): 32-35.

[8] 俞元洪, 胡庆席. 带有阻尼项的偏泛函微分方程解的振动准则[J]. 数学的实践与认识, 2000, 30(3): 331-338.

[9] 叶其孝, 李正元. 反应扩散方程引论[M]. 北京: 科学出版社, 1990.

[责任编辑: 丁　蓉]