具时滞增长反应及脉冲输入 Monod-Haldane 恒化器模型的分析

魏春金[1,2], 陈兰荪[2]

(1. 集美大学理学院, 福建 厦门 361021)
(2. 大连理工大学应用数学系, 辽宁 大连 116024)

[摘要] 考虑了一类具有时滞增长反应及脉冲输入营养基的 Monod-Haldane恒化器模型. 获得微生物灭绝周期解全局吸引的充分条件, 并运用脉冲时滞微分方程的相关理论和方法, 证明了系统在适当的条件下是持久的, 结论还表明该时滞是有害时滞.

[关键词] 脉冲输入, 恒化器模型, 增长反应时滞, 持久性, 灭绝
[中图分类号] O175 [文献标识码] A [文章编号] 1001-4616(2008)03-0006-06

Analysis of Monod-Haldane Chemostat Model With Delayed Growth Response and Impulsive Input

Wei Chunjin[1,2], Chen Lansun[2]

(1. School of Science, Jimei University, Xiamen 361021, China)
(2. Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: A Monod-Haldane chemostat model with delayed growth response and impulsive input concentration of the nutrient was considered. The sufficient conditions for the global attractivity of microorganism-extinction periodic solution were obtained. Furthermore, using corresponding theories and methods of impulsive delayed differential equation, it was proved that the system was permanent under appropriate conditions. The results showed that time delay was profitless.

Key words: impulsive input, chemostat model, time delay for growth response, permanence, extinction

恒化器是用于微生物培养的一种实验装置, 相当于一个简化的湖泊模型, 它具有湖泊和海洋中单细胞藻类浮游生物生长的近似条件, 可以用来模拟浮游生物的生长. 最近几年, 微生物的连续培养在文献[1, 2]中已经做了研究, 并且获得了一些有趣的结论. 许多学者指出考虑周期干扰是必要的也是重要的, 因为周期干扰的模型可以更真实反映自然现象(例如, 洪水季节性泛滥, 动物季节性交配, 季节性收获). 与突然性的干扰相联系的系统是脉冲微分方程, 文献[3]对此做了集中而且系统的研究. 虽然 Monod 模型在描述定态增长率上获得了一定成功[4,5], 但发现在恒化器实验中, 预知与测定关于不是全局吸引的平衡态上的初始值的瞬时情况时是不合适的. 因为, 当环境变化时, 微生物会发生生长反应迟滞[6]. 因此, 本文考虑具有时滞增长反应及脉冲输入营养基的 Monod-Haldane恒化器模型:

$$\begin{cases}\left.\begin{aligned}&S'(t)=-DS(t)-\frac{u_1S(t)x_1(t)}{\delta_1(A_1+S(t)+B_1S^2(t))}-\frac{u_2S(t)x_2(t)}{\delta_2(A_2+S(t)+B_2S^2(t))},\\&x'_i(t)=-Dx_i(t)+e^{-D\tau_i}\frac{u_iS(t-\tau_i)x_i(t-\tau_i)}{A_i+S(t-\tau_i)+B_iS^2(t-\tau_i)},\quad i=1,2\end{aligned}\right\}\ t\neq nT,\\S(t^+)=S(t)+\gamma S_0,\ x_i(t^+)=x_i(t),\quad i=1,2,\quad t=nT,\quad n=1,2,\cdots\\S(0^+)\geqslant 0,\ x_i(0^+)\geqslant 0,\quad i=1,2\end{cases}\tag{1}$$

收稿日期: 2008-03-06
基金项目: 国家自然科学基金(10771179)资助项目.
通讯联系人: 魏春金, 博士生, 研究方向: 生物数学. E-mail: chunjinwei92@163.com

这里 $S(t)$ 表示 t时刻在培养基内未耗尽的营养液的浓度, 并且 $x_i(t)(i=1,2)$ 表示在 t时刻微生物种群的数量, S_0和 D 都是正的常数并分别表示微生物生长所需要的营养液浓度量及恒化器的流速率, $T=\gamma/D$ 是脉冲周期, γS_0是在每个脉冲的 T时刻控制流入的培养基的量, DS_0表示单位时间内平均被加入的培养基的量. 常数 $\tau_i\geqslant 0(i=1,2)$ 表示营养液向微生物转化的迟滞时间, 正的常数 $e^{-D\tau_i}(i=1,2)$ 是必须的, 因为假设目前微生物数量的变化量依赖于在过去的 $\tau_i(i=1,2)$时刻前营养液消耗量及在 $\tau_i(i=1,2)$单位时间内微生物的死亡量, $S(nT^+)=\lim\limits_{n\to nT^+}S(t)$, 且 $S(t)$ 在 $t=nT$时刻左连续, 即 $S(nT)=\lim\limits_{n\to nT^-}S(t)$.

根据时滞微分方程理论, 为把系统(1)应用到种群动力学中去, 我们总是假设系统(1)的解满足初始条件

$$(\phi_1(s),\phi_2(s),\phi_3(s))\in C_+=C([-\tau,0],R_+^3),\ \phi_i(0)>0\quad(i=1,2,3).\tag{2}$$

为方便起见, 我们给出下列系统的基本性质:

$$\begin{cases}S'(t)=-DS(t), & t\neq nT,\\ S(t^+)=S(t)+\gamma S_0, & t=nT,\\ S(0^+)=S_{10}\geqslant 0.\end{cases}\tag{3}$$

引理 1[7] 系统(3)有一个正的周期解 $S^*(t)$且对系统(3)满足初始条件 $S_{10}\geqslant 0$的每一个解 $S(t)$, 当 $t\to\infty$时, $|S(t)-S^*(t)|\to 0$, 而且(i)若 $S_{10}\geqslant\dfrac{\gamma S_0}{1-e^{-DT}}$, 则 $S(t)\geqslant S^*(t)$; (ii)若 $S_{10}<\dfrac{\gamma S_0}{1-e^{-DT}}$, 则 $S(t)<S^*(t)$, 这里 $S^*(t)=\dfrac{\gamma S_0e^{-D(t-nT)}}{1-e^{-DT}}$, $t\in(nT,(n+1)T]$, $n\in\mathbf{N}$, $S^*(0^+)=\dfrac{\gamma S_0}{1-e^{-DT}}$.

引理 2 假设$(S(t),x_1(t),x_2(t))$是系统(1)满足初始条件(2)的任意解, 则存在常数 $M>0$及充分小的 $\varepsilon>0$使 $S(t)\leqslant M$, $x_1(t)\leqslant M$, $x_2(t)\leqslant M$.

证明 让$(S(t),x_1(t),x_2(t))$表示系统(1)满足初始条件(2)的任意解. 令

$$W(t)=S(t)+e^{D\tau_1}\frac{1}{\delta_1}x_1(t+\tau_1)+e^{D\tau_2}\frac{1}{\delta_2}x_2(t+\tau_2).$$

沿着系统(1)的轨线计算 $W(t)$ 的上右导数

$$W'(t)=-D\left(S(t)+e^{D\tau_1}\frac{1}{\delta_1}x_1(t+\tau_1)+e^{D\tau_2}\frac{1}{\delta_2}x_2(t+\tau_2)\right)=-DW(t).$$

当 $t=nT$, $n\in\mathbf{N}$, $W(t^+)=W(t)+\gamma S_0$, 由[3]的引理 2.2, 得

$$W(t)>W(0^+)e^{-Dt}+\gamma S_0\frac{e^{-D(t-T)}}{1-e^{-DT}}+\gamma S_0\frac{e^{DT}}{e^{DT}-1}\to\gamma S_0\frac{e^{DT}}{e^{DT}-1},\quad t\to\infty.$$

由 $W(t)$的定义知存在常数 $M>0$, 当 t充分大时, 有 $S(t)\leqslant M$, $x_1(t)\leqslant M$, $x_2(t)\leqslant M$. 证毕.

1 微生物灭绝

恒化器中的微生物种群的灭绝性, 就是微生物从恒化器中完全缺失, 即 $x_i(t)=0(i=1,2)$, $t\geqslant 0$. 由引理 1知系统(1)有一个微生物灭绝周期解$(S^*(t),0,0)$, $t\in(nT,(n+1)T]$, $n\in\mathbf{N}$. 下面给出微生物灭绝周期解全局吸引的条件:

定理 1 设$(S(t),x_1(t),x_2(t))$是系统(1)的任意解. 如果 $R_1<1$成立, 那么系统(1)的微生物灭绝周期解$(S^*(t),0,0)$是全局吸引的, 其中 $R_1=\max\left\{\dfrac{u_1\zeta e^{-D\tau_1}}{D(A_1+\zeta)},\dfrac{u_2\zeta e^{-D\tau_2}}{D(A_2+\zeta)}\right\}$, $\zeta=\dfrac{\gamma S_0}{1-e^{-DT}}$.

证明 设$(S(t),x_1(t),x_2(t))$是系统(1)满足初始条件(2)的任意一个解. 由 $R_1<1$, 可以选择充分小的正常数 ε使得

$$\frac{u_1\eta e^{-D\tau_1}}{A_1+\eta}-D<0,\tag{4}$$

其中 $\eta=\dfrac{\gamma S_0}{1-e^{-DT}}+\varepsilon$. 从系统(1)的第一个方程得 $S'(t)\leqslant -DS(t)$. 于是我们考虑下面的脉冲微分不等式:

$$\begin{cases} S'(t) \leqslant -DS(t), & t \neq nT, \quad n \in \mathbf{N}, \\ S(t^+) = S(t) + \gamma S_0, & t = nT, \ n \in \mathbf{N}. \end{cases} \tag{5}$$

由脉冲微分方程的比较定理[3],得 $\lim\sup_{t\to\infty} S(t) \leqslant \frac{\gamma S_0}{1-e^{-DT}}$. 因此,存在一个正整数 n_1 及一个任意小的正常数 ε 使对 $t \geqslant n_1 T$,有

$$S(t) \leqslant \frac{\gamma S_0}{1-e^{-DT}} + \varepsilon =: \eta. \tag{6}$$

由(6)及系统(1),对于 $t > n_1 T + \tau_1$,有 $x'_1(t) \leqslant \frac{u_1 \eta e^{-D\tau_1}}{A_1+\eta} x_1(t-\tau_1) - Dx_1(t)$. 考虑下面的比较方程 $\frac{dz(t)}{dt} = \frac{u_1 \eta e^{-D\tau_1}}{A_1+\eta} z(t-\tau_1) - Dz(t)$. 根据[8]及(4)式,易知 $\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$. 对于 $s \in [-\tau_1, 0]$,有 $x_1(s) = z(s) = \phi_2(s) > 0$. 根据微分方程的比较定理及解的非负性(即 $x_1(t) \geqslant 0$)知,当 $t \to \infty$ 时,有 $x_1(t) \to 0$. 同理,可得当 $t \to \infty$ 时,有 $x_2(t) \to 0$. 不失一般性,假设 $0 < x_i(t) < \varepsilon (i = 1, 2)$,对于所有 $t \geqslant 0$. 根据系统(1)的第一个方程,有

$$S'(t) \geqslant -\left(D + \frac{u_1\varepsilon}{\delta_1 A_1} + \frac{u_2\varepsilon}{\delta_2 A_2}\right) S(t).$$

考虑下面的脉冲系统

$$\begin{cases} z'_1(t) = -\left(D + \frac{u_1\varepsilon}{\delta_1 A_1} + \frac{u_2\varepsilon}{\delta_2 A_2}\right) z_1(t), & t \neq nT, \quad n \in \mathbf{N}, \\ z_1(t^+) = z_1(t) + \gamma S_0, & t = nT, \ n \in \mathbf{N}, \\ z_1(0^+) = S(0^+). \end{cases} \tag{7}$$

于是,当 $nT < t \leqslant (n+1)T$ 时,$\tilde{z}_1(t) = \frac{\gamma S_0 e^{-(D+\frac{u_1\varepsilon}{\delta_1 A_1}+\frac{u_2\varepsilon}{\delta_2 A_2})(t-nT)}}{1-e^{-(D+\frac{u_1\varepsilon}{\delta_1 A_1}+\frac{u_2\varepsilon}{\delta_2 A_2})T}}$ 是系统(7)的全局渐近稳定正周期解. 因此,$\tilde{z}_1(t) \leqslant S(t)$,且当 $\varepsilon \to 0$ 时,$\tilde{z}_1(t) \to S^*(t)$. 根据脉冲方程的比较定理[3],对任意 $\varepsilon_1 > 0$,存在 $T_1 > 0$ 使对 $t > T_1$,有

$$S(t) > \tilde{z}_1(t) - \varepsilon_1. \tag{8}$$

另一方面,由系统(1)的第一个方程,得 $S'(t) \leqslant -DS(t)$. 同理根据脉冲方程的比较定理[3],可以得到

$$S(t) < \tilde{z}_2(t) + \varepsilon_1, \tag{9}$$

这里 $\tilde{z}_2(t) = S^*(t)$, $nT < t \leqslant (n+1)T$. 令 $\varepsilon \to 0$(t 足够大),由(8)和(9)得

$$S^*(t) - \varepsilon_1 < S(t) < S^*(t) + \varepsilon_1,$$

这意味着当 $t \to \infty$ 时,$S(t) \to S^*(t)$. 证明完毕.

推论 1　设 $(S(t), x_1(t), x_2(t))$ 是系统(1)的任意解. 如果下列条件之一成立,那么系统(1)的微生物灭绝周期解 $(S^*(t), 0, 0)$ 是全局吸引的.

(1) $\gamma S_0 < \min\left\{\frac{DA_1(1-e^{-DT})}{u_1 e^{-D\tau_1} - D}, \frac{DA_2(1-e^{-DT})}{u_2 e^{-D\tau_2} - D}\right\}$;

(2) $T > \max\left\{\frac{1}{D}\ln\frac{DA_1}{(1+D\gamma S_0)DA_1 - u_1\gamma S_0 e^{-D\tau_1}}, \frac{1}{D}\ln\frac{DA_2}{(1+D\gamma S_0)DA_2 - u_2\gamma S_0 e^{-D\tau_2}}\right\}$;

(3) $\tau_1 > \frac{1}{D}\ln\frac{u_1\gamma S_0}{DA_1(1-e^{-DT}) + D\gamma S_0}$ 且 $\tau_2 > \frac{1}{D}\ln\frac{u_2\gamma S_0}{DA_2(1-e^{-DT}) + D\gamma S_0}$.

2　永久持续生存性

下面给出系统持续生存的条件.

定理 2　设 $(S(t), x_1(t), x_2(t))$ 是系统(1)的任意解. 如果 $R_2 > 1$ 成立,那么系统(1)的微生物种

群是持续生存的, 其中 $R_2 = \min\left\{\dfrac{u_1 \gamma S_0 e^{-D\tau_1}}{D((e^{AT}-1)(A_1+B_1M^2)+\gamma S_0)}, \dfrac{u_2 \gamma S_0 e^{-D\tau_2}}{D((e^{BT}-1)(A_2+B_2M^2)+\gamma S_0)}\right\}$, $A = D + \dfrac{u_2M}{\delta_2 A_2}$, $B = D + \dfrac{u_1M}{\delta_1 A_1}$.

证明　假设 $(S(t), x_1(t), x_2(t))$ 是系统 (1) 满足初始条件 (2) 的任意一个正解. 根据系统 (1) 的第一个方程, 有 $S'(t) \geqslant -(D + \dfrac{u_1M}{\delta_1 A_1} + \dfrac{u_2M}{\delta_2 A_2})S(t)$. 考虑下面的脉冲比较系统:

$$\begin{cases} v'_1(t) = -\left(D + \dfrac{u_1M}{\delta_1 A_1} + \dfrac{u_2M}{\delta_2 A_2}\right) v_1(t), & t \neq nT,\ n \in \mathbf{N}, \\ v_1(t^+) = v_1(t) + \gamma S_0, & t = nT,\ n \in \mathbf{N}, \\ v_1(0^+) = S(0^+). \end{cases} \tag{10}$$

于是, 当 $nT < t \leqslant (n+1)T$ 时, $\tilde{v}_1(t) = \dfrac{\gamma S_0 e^{-(D+\frac{u_1M}{\delta_1A_1}+\frac{u_2M}{\delta_2A_2})(t-nT)}}{1 - e^{-(D+\frac{u_1M}{\delta_1A_1}+\frac{u_2M}{\delta_2A_2})T}}$ 是系统 (10) 的全局渐近稳定的正周期解. 因此, 对于充分大的 t, 有 $S(t) \geqslant \tilde{v}_1(t) - \varepsilon$, 令 $m \triangleq \dfrac{\gamma S_0 e^{-(D+\frac{u_1M}{\delta_1A_1}+\frac{u_2M}{\delta_2A_2})T}}{1 - e^{-(D+\frac{u_1M}{\delta_1A_1}+\frac{u_2M}{\delta_2A_2})T}} - \varepsilon$, 则有 $S(t) \geqslant m$. 把 (1) 的第二个方程当 $i = 1$ 时改写为

$$x_1'(t) = \left[\frac{u_1 e^{-D\tau_1} S(t)}{A_1 + S(t) + B_1 S^2(t)} - D\right] x_1(t) - u_1 e^{-D\tau_1} \frac{d}{dt} \int_{t-\tau_1}^{t} \frac{S(\theta)x_1(\theta)}{A_1 + S(\theta) + B_1 S^2(\theta)} d\theta \tag{11}$$

定义

$$V_1(t) = x_1(t) + u_1 e^{-D\tau_1} \int_{t-\tau_1}^{t} \frac{S(\theta)x_1(\theta)}{A_1 + S(\theta) + B_1 S^2(\theta)} d\theta$$

沿着系统 (1) 的解, 计算 $V_1(t)$ 的导数, 并根据 (11) 式, 得

$$\frac{dV_1(t)}{dt} = \left[u_1 e^{-D\tau_1} \frac{S(t)}{A_1 + S(t) + B_1 S^2(t)} - D\right] x_1(t).$$

由于 $R_2 > 1$, 可以选择 $l_1 > 0$, $l_2 > 0$, 使得

$$D + \frac{u_1 l_1}{\delta_1 A_1} + \frac{u_2 M}{\delta_2 A_2} = \frac{1}{T} \ln\left(\frac{u_1 \gamma S_0 e^{-D\tau_1}}{D(A_1 + B_1M^2)} - \frac{\gamma S_0}{A_1 + B_1M^2} + 1\right),$$

$$D + \frac{u_1 M}{\delta_1 A_1} + \frac{u_2 l_2}{\delta_2 A_2} = \frac{1}{T} \ln\left(\frac{u_2 \gamma S_0 e^{-D\tau_2}}{D(A_2 + B_2M^2)} - \frac{\gamma S_0}{A_2 + B_2M^2} + 1\right).$$

选择充分小的 $\varepsilon_1 > 0$ 使得

$$\frac{u_1 \eta_1 e^{-D\tau_1}}{D(A_1 + B_1M^2 + \eta_1)} > 1, \tag{12}$$

其中 $\eta_1 = \dfrac{\gamma S_0 e^{-(D+\frac{u_1l_1}{\delta_1A_1}+\frac{u_2M}{\delta_2A_2})T}}{1 - e^{-(D+\frac{u_1l_1}{\delta_1A_1}+\frac{u_2M}{\delta_2A_2})T}} - \varepsilon_1$. 我们声称对于充分大的 t, 有 $x_i \geqslant l_i\ (i = 1, 2)$. 将分 2个步骤加以证明.

步骤 1　证明存在 $t_1, t_2 > 0$, 使得 $x_1(t_1) > l_1$, $x_2(t_2) > l_2$. 否则的话, 存在 3种情形:

(i) 存在 $t_2 > 0$, 使得 $x_2(t_2) \geqslant l_2$, 且对于所有的 $t > 0$, 有 $x_1(t) < l_1$;

(ii) 存在 $t_1 > 0$, 使得 $x_1(t_1) \geqslant l_1$, 且对于所有的 $t > 0$, 有 $x_2(t) < l_2$;

(iii) 对于所有的 $t > 0$, 有 $x_1(t) < l_1$, $x_2(t) < l_2$.

对于情形 (i), 有

$$S'(t) \geqslant -(D + \frac{u_1 l_1}{\delta_1 A_1} + \frac{u_2 M}{\delta_2 A_2})S(t). \tag{13}$$

同样根据脉冲方程的比较定理[3], 存在 $T_1 > 0$, 当 $t > T_1 + \tau_1$ 时, 有 $S(t) \geqslant \tilde{v}_2(t) - \varepsilon_1 > \dfrac{\text{¥} S_0 e^{-(D+\frac{u_1 l_1}{\delta_1 A_1}+\frac{u_2 M}{\delta_2 A_2})T}}{1-e^{-(D+\frac{u_1 l_1}{\delta_1 A_1}+\frac{u_2 M}{\delta_2 A_2})T}}$ $- \varepsilon_1 \cdot \eta_1$. 这里 $\tilde{v}_2(t) = \dfrac{\text{¥} S_0 e^{-(D+\frac{u_1 l_1}{\delta_1 A_1}+\frac{u_2 M}{\delta_2 A_2})(t-nT)}}{1-e^{-(D+\frac{u_1 l_1}{\delta_1 A_1}+\frac{u_2 M}{\delta_2 A_2})T}}$, $nT < t \leqslant (n+1)T$. 故有

$$\frac{dV_1(t)}{dt} \geqslant D\left[\frac{u_1 e^{-D\tau_1}\eta_1}{D(A_1+\eta_1+B_1M^2)} - 1\right]x_1(t), \quad t > T_1. \tag{14}$$

令 $x_1^l = \min\limits_{t\in[T_1, T_1+\tau_1]} x_1(t)$. 我们声称 $x_1(t) \geqslant x_1^l$ 对所有的 $t \geqslant T_1$. 否则, 存在一个非负常数 T_2 使 $x_1(t) \geqslant x_1^l$, $t \in [T_1, T_1+\tau_1+T_2]$, $x_1(T_1+\tau_1+T_2) = x_1^l$ 和 $x'_1(T_1+\tau_1+T_2) \leqslant 0$ 成立. 于是由系统(1)的第二个方程和(12), 易知

$$x'_1(T_1+\tau_1+T_2) \geqslant D\left[\frac{u_1 e^{-D\tau_1}\eta_1}{D(A_1+\eta_1+B_1M^2)} - 1\right]x_1^l > 0,$$

矛盾. 因此, 对所有的 $t \geqslant T_1$, 有 $x_1(t) \geqslant x_1^l > 0$. 由(14), 得

$$\frac{dV_1(t)}{dt} \geqslant D\left[\frac{u_1 e^{-D\tau_1}\eta_1}{D(A_1+\eta_1+B_1M^2)} - 1\right]x_1^l > 0, \quad t > T_1,$$

这意味着当 $t \to +\infty$ 时, $V_1(t) \to +\infty$. 这与 $V_1(t) \leqslant M(1+e^{-D\tau_1}\frac{u_1 M}{A_1}\tau_1)$ 矛盾. 因此 $x_1(t) < l_1$ 不可能对于所有的 $t > 0$ 成立. 同理可证明情形(ii).

接下来考虑情形(iii). 选择充分小的 $\varepsilon_2 > 0$ 使得

$$\frac{u_1 \eta_2 e^{-D\tau_1}}{D(A_1+B_1M^2+\eta_2)} > 1, \tag{15}$$

其中 $\eta_2 = \dfrac{\text{¥} S_0 e^{-(D+\frac{u_1 l_1}{\delta_1 A_1}+\frac{u_2 l_2}{\delta_2 A_2})T}}{1-e^{-(D+\frac{u_1 l_1}{\delta_1 A_1}+\frac{u_2 l_2}{\delta_2 A_2})T}} - \varepsilon_2$. 由情形(iii)的假设, 有

$$S'(t) \geqslant -(D+\frac{u_1 l_1}{\delta_1 A_1}+\frac{u_2 l_2}{\delta_2 A_2})S(t). \tag{16}$$

同样根据脉冲方程的比较定理, 存在 $T_3 > 0$, 当 $t > T_3 + \tau_1$ 时, 有 $S(t) \geqslant \tilde{v}_3(t) - \varepsilon_2 > \dfrac{\text{¥} S_0 e^{-(D+\frac{u_1 l_1}{\delta_1 A_1}+\frac{u_2 l_2}{\delta_2 A_2})T}}{1-e^{-(D+\frac{u_1 l_1}{\delta_1 A_1}+\frac{u_2 l_2}{\delta_2 A_2})T}} -$ $\varepsilon_2 \cdot \eta_2$. 其中 $\tilde{v}_3(t) = \dfrac{\text{¥} S_0 e^{-(D+\frac{u_1 l_1}{\delta_1 A_1}+\frac{u_2 l_2}{\delta_2 A_2})(t-nT)}}{1-e^{-(D+\frac{u_1 l_1}{\delta_1 A_1}+\frac{u_2 l_2}{\delta_2 A_2})T}}$, $nT < t \leqslant (n+1)T$, 故有

$$\frac{dV_1(t)}{dt} \geqslant D\left[\frac{u_1 e^{-D\tau_1}\eta_2}{D(A_1+\eta_2+B_1M^2)} - 1\right]x_1(t). \tag{17}$$

与前面的讨论相似, 当 $t \to +\infty$ 时, $V_1(t) \to +\infty$, 矛盾.

步骤 2 一方面, 如果对于所有足够大的 t 有 $x_1(t) \geqslant l_1$, 则我们的目的已经达到了. 另一方面, $x_1(t)$ 关于 l_1 振荡. 令 $l^* = \min\left\{\frac{l_1}{2}, l_1 e^{-D\tau_1}\right\}$. 我们声称 $x_1(t) \geqslant l^*$. 下面, 我们就来说明 $x_1(t) \geqslant l^*$. 存在两个正常数 t, ω, 使 $x_1(t) = x_1(t+\omega) = l_1$ 及 $x_1(t) < l_1$, 对 $t < t < t+\omega$. 当 t 足够大, 不等式 $S(t) \geqslant \max\{\eta_1, \eta_2\}$ 对于 $t < t < t+\omega$ 满足. 因为 $x_1(t)$ 连续有界且不受脉冲影响, 可以推得 $x_1(t)$ 是一致连续. 因此存在常数 T_4(这里 $0 < T_4 < \tau_1$, T_4 不依赖于 t 的选择) 使对所有的 $t \leqslant t \leqslant t+T_4$, 有 $x_1(t) > \frac{l_1}{2}$. 如果 $\omega \leqslant T_4$, 目的达到. 如果 $T_4 < \omega \leqslant \tau_1$, 由系统(1)的第二个方程, 对 $t < t \leqslant t+\omega$, 有 $x_1'(t) \geqslant -Dx_1(t)$. 从而因为 $x_1(t) = l_1$, 对于 $t < t \leqslant t+\omega \leqslant t+\tau_1$, 我们可得 $x_1(t) \geqslant l_1 e^{-D\tau_1}$, 显然, 对 $t < t \leqslant t+\omega$, 有 $x_1(t) \geqslant l^*$. 如果 $\omega \geqslant \tau_1$, 对于 $t < t \leqslant t+\tau_1$, 有 $x_1(t) \geqslant l^*$. 于是, 和上面声称的一样继续进行讨论, 我们获得

$x_1(t) \geqslant l^*$ 对于 $t+\tau_1 \leqslant t \leqslant t+\omega$ 成立. 因为 $[t, t+\omega]$ 任意选择的 (只需 t 足够大), 可得当 t 足够大时, 有 $x_1(t) \geqslant l^*$. 由上面的讨论可以看出 l^* 的选择不依赖于 (1) 的正解, 且当 t 充分大时, $x_1(t) \geqslant l^*$ 成立. 同理可证 $x_2(t) \geqslant l^{**}$, 其中 $l^{**} = \min\left\{\frac{l_2}{2}, l_2 e^{-D\tau_2}\right\}$. 证毕.

推论 2 设 $(S(t), x_1(t), x_2(t))$ 是系统 (1) 的任意解. 如果下列条件之一成立, 那么系统 (1) 的微生物种群是持续生存的. 其中 $A = D + \frac{u_2 M}{\delta_2 A_2}$, $B = D + \frac{u_1 M}{\delta_1 A_1}$.

(1) $\gamma S_0 > \max\left\{\frac{D(e^{DT}-1)(A_1+B_1M^2)}{u_1 e^{-D\tau_1}-D}, \frac{D(e^{DT}-1)(A_2+B_2M^2)}{u_2 e^{-D\tau_2}-D}\right\}$;

(2) $T < \min\left\{\frac{1}{A}\ln\frac{u_1\gamma S_0 e^{-D\tau_1}+D(A_1+B_1M^2)-D\gamma S_0}{D(A_1+B_1M^2)}, \frac{1}{B}\ln\frac{u_2\gamma S_0 e^{-D\tau_2}+D(A_2+B_2M^2)-D\gamma S_0}{D(A_2+B_2M^2)}\right\}$;

(3) $\tau_1 < \frac{1}{D}\ln\frac{u_1\gamma S_0}{D((e^{AT}-1)(A_1+B_1M^2)+\gamma S_0)}$ 且 $\tau_2 < \frac{1}{D}\ln\frac{u_2\gamma S_0}{D((e^{BT}-1)(A_2+B_2M^2)+\gamma S_0)}$.

3 讨论

定理 1和推论 1表明小的脉冲输入量 γS_0, 大的脉冲周期以及大的生长时滞将导致恒化器中微生物灭绝, 也就是微生物培养失败, 反之, 恒化器中微生物能够持续生存. 显然, 如果连续培养和脉冲培养都能获得微生物的话, 后者要好于前者, 因为脉冲培养能够节约培养基. 微生物的灭绝与否决定于在每一次 nT 时刻的营养液的脉冲输入量 γS_0 以及脉冲周期的长短. 同时, 我们也可以看到微生物的灭绝与持久也依赖于微生物生长繁殖的迟滞. 当生长繁殖期滞后太长时, 微生物的持久性消失, 作为消费者的微生物灭绝, 我们称之为“有害”时滞. 这表明模型的动力学行为对生长时滞非常敏感. 直觉反映的生物意义是: 如果从吸收营养液到微生物的转化花费太多的时间, 则微生物将灭绝. 这意味着时滞对模型的动力学行为有重要的影响.

[参考文献]

[1] Hale J K, Somolinas A S. Competition for flutuating nutrient[J]. Journal of Mathematical Biology, 1983, 18(3): 255-280.

[2] Buler G J, Hsu S B, Waltman P. A mathematical model of the chemostat with periodic washout rate[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1985, 45(3): 435-449.

[3] Bainov D D, Simeonov P. Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications[M]. Harlow: Longman Scientific and Technical Press, 1993.

[4] Smith H L, Waltman P. The Theory of the Chemostat[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[5] Hansen S R, Hubbell S P. Single-nutrient microbial competition: qualitative agreement between experimental and theoretically forecast outcomes[J]. Science, 1980, 207(4438): 1491-1493.

[6] Barford J P, Pamment N B, Hall R J. Lag phases and transients[M]//Bazin M J. Microbial Population Dynamics. Florida: CRC Press, 1982.

[7] Meng X Zh, Zhao Q L, Chen L S. Global qualitive analysis of new Monod type chemostat model with delayed growth response and pulsed input in polluted environment[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2008, 29(1): 75-87.

[8] Kuang Y. Delay Differential Equations With Applications in Population Dynamics[M]. California: Academic Press Inc, 1993.

[责任编辑: 陆炳新]