与导数分担有理函数的整函数

朱颖中[1], 常建明[2]

(1. 江苏大学理学院, 江苏 镇江 212013)
(2 常熟理工学院数学系, 江苏 常熟 215500)

[摘要] 主要证明了以下定理: 设 f是超越整函数, R 是非常数有理函数, k、m 是两个不同的正整数, $d=(k,m)$ 是 k、m 的最大公约数. 若 f, $f^{(k)}$, $f^{(m)}$ CM 分担 R, 那么 $f=f^{(d)}$.

[关键词] 整函数, 有理函数, 惟一性
[中图分类号] O174. 52　[文献标识码] A　[文章编号] 1001-4616(2008) 03-0044-04

On Entire Functions That Share a Rational Function With Their Derivatives

Zhu Yingzhong[1], Chang Jianming[2]

(1. Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)
(2. Department of Mathematics, Changshu Institute of Technology, Changshu 215500, China)

Abstract The theorem was proved: Let f be a transcendental entire function, R be a nonzero rational functions, k and m be two distinct positive integers, and $d=(k,m)$ be the greatest common divisor of k and m. If f, $f^{(k)}$ and $f^{(m)}$ share R CM, then $f=f^{(d)}$.

Key words: entire functions, rational functions, unicity theorem

迄今为止全平面上亚纯函数的惟一性已有许多结果[1-7]. 其中 Jank-Mues-Volkmann于 1986年在文[5]中证明了以下一个亚纯函数与导函数的惟一性定理.

定理 A　设 f是非常数亚纯函数, a是非零有限复数. 若 f, f', f'' CM 分担 a, 那么 $f\equiv f'$.

这里函数 f和 g CM 分担复数 a是指 $f-a$和 $g-a$有相同的零点, 并且相应的重级也相同 (详见文[6]). 由定理 A, 下面的问题是自然的.

问题 **1**　设 f是非常数亚纯函数, a是非零有限复数, k、m $(k<m)$ 是两个不同的正整数. 如果 f, $f^{(k)}$, $f^{(m)}$ CM 分担 a, 那么有 $f\equiv f^{(k)}$ 吗?

该问题在文[6-9]中都有涉及. 根据文[10]中的反例, 一般而言是得不到 $f\equiv f^{(k)}$ 的, 但此时我们能得到如下结论:

定理 B[11]　设 f是非常数整函数, a是非零有限复数, k、m 是两个不同的正整数, (k,m)是 k、m的最大公约数. 如果 f, $f^{(k)}$, $f^{(m)}$ CM 分担 a, 则 $f^{(k)}=f^{(m)}$.

我们推广了定理 B, 得到了如下结果:

定理 **1**　设 f是超越整函数, R是非常数有理函数, k、m是两个不同的正整数, $d=(k,m)$是 k、m 的最大公约数. 如果 f, $f^{(k)}$, $f^{(m)}$ CM 分担 R, 则 $f=f^{(d)}$.

文中我们将使用 Nevanlinna理论中的标准符号和基本结论而不另加说明, 详细情况请参阅文[5, 12-14], 这里就不再赘述.

收稿日期: 2008-02-11.
基金项目: 国家自然科学基金 (10671093)资助项目.
通讯联系人: 朱颖中, 硕士研究生, 研究方向: 复分析. E-mail: zhuyz1983@163.com

1 主要引理

我们用 $P_d[f]$ 来表示一个微分多项式, f 的级 $\rho<\infty$. 用 $\mathscr{P}[f]$ 表示 $P_d[f]$ 的集合.

引理 **1**[7] 设 $a_j(z)$ 是级 $\leqslant\rho(<\infty)$ 的整函数, $g_j(z)$ 是整函数使得 $g_i-g_j\ (i\neq j)$ 是超越函数或次数大于 ρ 的多项式. 若 $\sum_{j=1}^{n}a_j(z)e^{g_j(z)}\equiv a_0(z)$, 则 $a_j(z)\equiv 0(j=0,1,\cdots,n)$.

引理 **2** 设 f、α 是非常数整函数, R 是非常数有理函数, k 是正整数. 若 $f^{(k)}=R+e^{\alpha}f$, 那么对于任意正整数 $j(1\leqslant j\leqslant k-1)$, 我们有 $f^{(k+j)}=\gamma_{0,j}f+\gamma_{1,j}f'+\cdots+\gamma_{j,j}f^{(j)}+R^{(j)}$, 整函数 $\gamma_{i,j}$ 满足

$$\begin{pmatrix}\gamma_{0,j}\\ \vdots\\ \gamma_{j,j}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{0,1,j}e^{\alpha}\\ \vdots\\ A_{j,1,j}e^{\alpha}\end{pmatrix},$$

其中 $A_{i,1,j}=\frac{j!}{i!(j-i)!}e^{-\alpha}(e^{\alpha})^{(j-i)}=\frac{j!}{i!(j-i)!}((\alpha')^{(j-i)}+P_{j-i-1}[\alpha'])(0\leqslant i\leqslant j)$. 特别地, $A_{j,1,j}\equiv 1(1\leqslant j\leqslant k-1)$. 当 $d\leqslant 0$ 时, $P_d[\alpha']\equiv 0$

证明 用数学归纳法, 证明过程及方法与文[11]中的引理 6基本相同, 详细过程请参阅文[11].

引理 **3** 设 f、α 是非常数整函数, R 是非常数有理函数, k 是正整数, $f^{(k)}=R+e^{\alpha}f$. 对任意正整数 $j(\geqslant k)$, $j=sk+l(s\geqslant 1,\ 0\leqslant l\leqslant k-1)$, 则 $f^{(k+j)}=\gamma_{-1,j}+\gamma_{0,j}f+\gamma_{1,j}f'+\cdots+\gamma_{k-1,j}f^{(k-1)}+R^{(j)}$, 其中 $\gamma_{i,j}$ 满足:

$$\begin{pmatrix}\gamma_{-1,j}\\ \gamma_{0,j}\\ \vdots\\ \gamma_{l,j}\\ \gamma_{l+1,j}\\ \vdots\\ \gamma_{k-1,j}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{-1,1,j}e^{\alpha}+\sum_{t=2}^{s-1}A_{-1,t,j}(e^{\alpha})^{t}+A_{-1,s,j}(e^{\alpha})^{s}\\ A_{0,1,j}e^{\alpha}+\sum_{t=2}^{s}A_{0,t,j}(e^{\alpha})^{t}+A_{0,s+1,j}(e^{\alpha})^{s+1}\\ \vdots\\ A_{l,1,j}e^{\alpha}+\sum_{t=2}^{s}A_{l,t,j}(e^{\alpha})^{t}+A_{l,s+1,j}(e^{\alpha})^{s+1}\\ A_{l+1,1,j}e^{\alpha}+\sum_{t=2}^{s-1}A_{l+1,t,j}(e^{\alpha})^{t}+A_{l+1,s,j}(e^{\alpha})^{s}\\ \vdots\\ A_{k-1,1,j}e^{\alpha}+\sum_{t=2}^{s-1}A_{k-1,t,j}(e^{\alpha})^{t}+A_{k-1,s,j}(e^{\alpha})^{s}\end{pmatrix},$$

$A_{i,t,j}$ 满足:

$$\begin{pmatrix}A_{-1,s,j}\\ A_{0,s+1,j}\\ \vdots\\ A_{l-1,s+1,j}\\ A_{l,s+1,j}\\ A_{l+1,s,j}\\ \vdots\\ A_{k-1,s,j}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_{-1,s,j}(\alpha')^{l}+P_{l-1}[\alpha',R]\\ C_{0,s+1,j}(\alpha')^{l}+P_{l-1}[\alpha']\\ \vdots\\ C_{l-1,s+1,j}\alpha'+P_0[\alpha']\\ 1\\ C_{l+1,s,j}(\alpha')^{k-1}+P_{k-2}[\alpha']\\ \vdots\\ C_{k-1,s,j}(\alpha')^{l+1}+P_l[\alpha']\end{pmatrix},$$

$C_{i,s+1,j}(0\leqslant i\leqslant l-1)$ 和 $C_{i,s,j}(l+1\leqslant i\leqslant k-1)$ 是正整数, $R_{-1,s,j}$ 是非零有理函数, $A_{i,1,j}=\frac{j!}{i!(j-i)!}e^{-\alpha}(e^{\alpha})^{(j-i)}=\frac{j!}{i!(j-i)!}((\alpha')^{(j-i)}+P_{j-i-1}[\alpha',R])(0\leqslant i\leqslant j)$. 当 $d\leqslant 0$ 时, $P_d[\alpha',R]\equiv 0$.

证明 用数学归纳法, 证明过程及方法与文[11]中的引理 7完全相同, 详细过程请参阅文[11].

引理 **4**[11] 设 Δ_j 是如下矩阵

$$\begin{pmatrix} \gamma_{0,j} & \gamma_{0,j+1} & \cdots & \gamma_{0,j+k-1} \\ \gamma_{1,j} & \gamma_{1,j+1} & \cdots & \gamma_{1,j+k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{k-1,j} & \gamma_{k-1,j+1} & \cdots & \gamma_{k-1,j+k-1} \end{pmatrix},$$

$\gamma_{i,j}$是引理2、3中定义的函数(当$1\leqslant j\leqslant k-1(i>j)$时,令$\gamma_{i,j}=0$). 记$\det(\Delta_j)$是$\Delta_j$的行列式. 当$j=sk+l(j\geqslant 1, s\geqslant 0, 0\leqslant l\leqslant k-1)$时, $\det(\Delta_j)=((\alpha')^{kj}+P_{kj-1}[\alpha',R])(e^{\alpha})^{k}+\sum_{t=k+1}^{(s+1)k+l-1}A_{t,j}(e^{\alpha})^{t}+(-1)^{l(k-l)}(e^{\alpha})^{(s+1)k+l}(A_{t,j}\in\mathscr{P}[\alpha',R])$.

2　定理1的证明

证明　根据题设,存在两个整函数$\alpha(z)$, $\beta(z)$满足

$$f^{(k)}(z)-R(z)=e^{\alpha(z)}[f(z)-R(z)], \tag{1}$$
$$f^{(m)}(z)-R(z)=e^{\beta(z)}[f(z)-R(z)]. \tag{2}$$

下面我们考虑两种情形:

情形1　α, β至少有一个是常数. 不妨设α是常数,令$e^{\alpha}=c$,由(1)得$f^{k}-cf=(1-c)R$.

当$c=1$时,解方程$f^{k}-f=0$,得

$$f(z)=\sum_{j=1}^{q}C_j e^{\lambda_j z}, \tag{3}$$

这里q是正整数, C_j、$\lambda_j(1\leqslant j\leqslant q)$是非零常数满足$(\lambda_j)^k=1(\lambda_i\neq\lambda_j, i\neq j)$. 根据(2)、(3)有$\rho(e^{\beta})\leqslant 1$. 于是$e^{\beta}=de^{\mu z}$, $d(\neq 0)$、μ是常数. 再根据(2)、(3)可得

$$-R+\sum_{j=1}^{q}(\lambda_j)^m C_j e^{\lambda_j z}=-Rde^{\mu z}+\sum_{j=1}^{q}C_j de^{(\lambda_j+\mu)z}. \tag{4}$$

对(4)应用引理1可得$\mu=0$, $(\lambda_j)^m=d=1$. 从而$f^{(m)}\equiv f^{(k)}\equiv f$,于是$f=f^{(d)}$.

当$c\neq 1$时,此时R是一个非常数多项式. 同上讨论可得R为常数,矛盾.

情形2　α, β都不是常数. 我们证明这种情形不会出现. 不失一般性,我们假设$k<m$. 设$F(z)=f(z)-R(z)$. 根据(1)和(2)我们有

$$F^{(k)}=(R-R^{(k)})+e^{\alpha}F, \tag{5}$$
$$F^{(m)}=(R-R^{(m)})+e^{\beta}F. \tag{6}$$

构造函数

$$\phi=\frac{(R-R^{(k)})F^{(m)}-(R-R^{(m)})F^{(k)}}{F}. \tag{7}$$

由(5)和(6)可得

$$\phi=(R-R^{(k)})e^{\beta}-(R-R^{(m)})e^{\alpha}. \tag{8}$$

下面我们考虑两种子情形:

情形2.1　$\phi\equiv 0$. 根据(8)我们得到$e^{\alpha-\beta}=\frac{R-R(k)}{R-R(m)}$. 由于右端当$z\to\infty$时极限为1,由刘维尔定理, $e^{\alpha-\beta}$为常数,进而有$e^{\alpha-\beta}=1$. 于是$e^{\alpha}=e^{\beta}$. 由此及(1)、(2),我们得$f^{(m)}-f^{(k)}=0$. 解该微分方程有

$$f(z)=b(z)+\sum_{j=1}^{q}C_j e^{\lambda_j z}, \tag{9}$$

其中b是一个多项式, $\deg b\leqslant k-1(s\leqslant m-k)$是正整数, C_j、λ_j是非零常数满足$(\lambda_j)^{m-k}=1(\lambda_i\neq\lambda_j, i\neq j)$. 根据(1)和(9),我们知道$\rho(e^{\alpha})\leqslant 1$,于是$e^{\alpha}=Ce^{cz}$,其中$c$、$C$是非零常数. 因此根据(1)和(9),我们可得

$$-R+\sum_{j=1}^{s}(\lambda_j)^k C_j e^{\lambda_j z}=(b(z)-R)Ce^{cz}+\sum_{j=1}^{s}CC_j e^{(\lambda_j+c)z}. \tag{10}$$

对(10)应用引理1,我们得到$c=0$,矛盾.

情形 2.2 $\phi \not\equiv 0$ 则 $T(r,\phi)=m(r,\phi)+O(\log r)=S(r,F)$. 由(8)有 $\frac{(R-R^{(k)})e^{\beta}}{\phi}=1+\frac{(R-R^{(m)})e^{\alpha}}{\phi}$. 因此根据第二基本定理可得:

$$T\left(r,\frac{(R-R^{(k)})e^{\beta}}{\phi}\right)\leqslant N\left(r,\frac{(R-R^{(k)})e^{\beta}}{\phi}\right)+N\left(r,\frac{\phi}{(R-R^{(k)})e^{\beta}}\right)+N\left(r,\frac{\phi}{(R-R^{(m)})e^{\alpha}}\right)+S\left(r,\frac{(R-R^{(k)})e^{\beta}}{\phi}\right)\leqslant S(r,F)+S\left(r,\frac{(R-R^{(k)})e^{\beta}}{\phi}\right).$$

联立(8)有 $T(r,e^{\beta})=S(r,F)$, $T(r,e^{\alpha})=S(r,F)$, 进而可得 $T(r,e^{\alpha})+T(r,e^{\beta})=S(r,F)$.

当 $0\leqslant j\leqslant k-1$ 时, 令 $p_{i,j}=\gamma_{i,m-k+j}(i=-1,0,1,\dots,k-1)$, 其中 $\gamma_{i,j}$ 是引理2~4中定义的函数. 根据引理2、3我们有 $F^{(m+j)}=F^{(k+m-k+j)}=p_{-1,j}+p_{0,j}F+p_{1,j}F'+\cdots+p_{k-1,j}F^{(k-1)}+R^{(m-k+j)}(j=0,1,\dots,k-1)$. 另一方面, 根据引理2, $F^{(m+j)}=q_{0,j}e^{\beta}F+q_{1,j}e^{\beta}F'+\cdots+q_{j,j}e^{\beta}F^{(j)}+R^{(j)}(0\leqslant j\leqslant k-1)$, 其中 $q_{i,j}(i\leqslant j)$ 是关于 β' 的微分多项式. 特别地, $q_{j,j}\equiv 1(j=1,2,\dots,k-1)$. 因此再联立(6)我们有

$$(F,F',\dots,F^{(k-1)})(e^{\beta}Q-P)=\Gamma, \tag{11}$$

其中 P, Q 分别为

$$\begin{pmatrix} p_{0,0} & p_{0,1} & \cdots & p_{0,k-1}\\ p_{1,0} & p_{1,1} & \cdots & p_{1,k-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ p_{k-1,0} & p_{k-1,1} & \cdots & p_{k-1,k-1}\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & q_{0,1} & \cdots & q_{0,k-1}\\ 0 & 1 & \cdots & q_{1,k-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix},$$

$$\Gamma=(p_{-1,0}+R^{(m-k)}-R,\ p_{-1,1}+R^{(m-k+1)}-R',\ \dots,\ p_{-1,k-1}+R^{(m-1)}-R^{(k-1)}).$$

根据(11)和线性方程组定理易得 $\det(e^{\beta}Q-P)=0$.

以下的证明过程和文[11]中的完全相同,最后得出矛盾,详细过程请参阅文[11],这里就不再赘述. 定理1证毕.

[参考文献]

[1] Fang M L, Xu W S. Unicity theorem for meromorphic functions that share two finite sets CM[J]. 南京师大学报:自然科学版, 1999, 22(1): 11-15.

[2] Qiu H L. Meromorphic functions that share rational functions[J]. 南京师大学报:自然科学版, 2007, 30(1): 6-12.

[3] 仇惠玲. 关于亚纯函数的惟一性[J]. 南京师大学报:自然科学版, 1998, 21(2): 25-30.

[4] 陈春芳. 亚纯函数及其导数的惟一性[J]. 南京师大学报:自然科学版, 2004, 27(3): 36-39.

[5] Jank G, Mues E, Volkmann L. Meromorphe Funktionen, die mit ihrer ersten und zweiten Ableitung einen endlichen Wert teilen[J]. Complex Variables, 6, 1986: 51-71.

[6] Yang C C, Yi H X. Uniqueness Theory of Meromorphic Functions[M]. Beijing: Science Press, 1995.

[7] Hua X H. Exceptional values of meromorphic functions[J]. Adv in Math, 1992, 21: 153-167.

[8] Hua X H, Yang C C. Uniqueness problems of entire and meromorphic functions[J]. Bull Hong Kong Math Soc, 1997, 1(2): 289-300.

[9] Yang L Z. Some recent progress in the uniqueness theory of meromorphic functions[C]// Proceedings of the Second ISAAC Congress (Fukuoka). Dordrecht: Kluwer Acad Publ, 1999: 551-564.

[10] Yang L Z. Further results on entire functions that share one value with their derivatives[J]. J Math Anal Appl, 1997, 212: 529-536.

[11] Chang J M, Fang M L. On entire functions that share a value with their derivatives[J]. Ann Acad Fenn Math, 2006, 31(2): 265-286.

[12] Gross F. Factorization of Meromorphic Functions[M]. Washington: Naval Research Lab, 1972.

[13] Hayman W K. Meromorphic Functions[M]. London: Oxford Univ Press, 1964.

[14] Yang L. Value Distribution Theory[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[责任编辑:丁 蓉]